EXPOSÉ DES VRAIS PRINCIPES

DES

MATHÉMATIQUES

PARIS — IMPRIMERIE DE J. CLAYE
7, rue Saint-Benoît.

EXPOSÉ

DES VRAIS PRINCIPES

DES

MATHÉMATIQUES

EXAMEN CRITIQUE

DES PRINCIPALES THÉORIES OU DOCTRINES QUI ONT ÉTÉ ADMISES
OU ÉMISES EN CETTE SCIENCE

et

RÉFLEXIONS

AU SUJET DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

PAR

F. COYTEUX

Auteur de deux livres intitulés, l'un : *Exposé d'un système philosophique*,
et l'autre : *Des vrais principes sociaux et politiques.*

Vitam impendere vero.

PARIS

MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER

Imprimeur-Libraire

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1858

PRÉFACE

Le titre de ce livre pourra étonner bien des gens, et principalement les personnes peu familières avec la science des mathématiques.

« Quoi ! s'écrieront-elles, est-ce qu'il y a quelque chose « à apprendre quant aux principes des mathématiques? « Est-ce que ces principes ne sont pas universellement « fixés, connus, professés? — Pourquoi donc les ma- « thématiques sont-elles honorées du titre de *sciences « exactes?* — Parce qu'elles sont en tous points ration- « nelles, évidentes, certaines, hors de doute. »

Eh bien, il y a là une grande erreur. Pour le montrer, il me suffirait de dire qu'il s'est produit, dans ces derniers temps, en Angleterre, une doctrine qui fait école, qui groupe autour d'elle de nombreux adeptes, et qui ose proscrire tous axiomes rationnels, et fonder les mathématiques, non plus sur la raison même, mais sur une sorte d'évidence sensible.

Je pourrais aussi représenter que, dans certaines parties de la science, les mathématiciens sont loin d'être d'accord sur les principes ou sur les théories qu'ils en font découler. Les personnes initiées à la science des mathématiques ne l'ignorent point; elles savent toutes les disputes, toutes les controverses qui ont surgi entre les savants sur des points essentiels, fondamentaux; elles savent que plusieurs ont appelé des réformes radicales; que, suivant l'opinion de l'un d'eux [1], la science serait *à refaire.*

Ce n'est pas seulement, et même ce n'est pas surtout au point de vue où se plaçaient les hommes éminents auxquels je fais allusion, que je vois la nécessité d'une réforme. Je signale des vices plus radicaux que ceux qu'ils apercevaient, et même, parmi les reproches qu'ils adressaient à la science, plusieurs ne me paraissent pas complétement fondés.

En dehors des théories générales que j'attaquerai, je montrerai aussi les vices d'un grand nombre de spéculations particulières.

Je suis persuadé et j'ose dire que ce livre devra amener tôt ou tard une véritable révolution dans plusieurs parties très-importantes des mathématiques, et modifier l'esprit ou la lettre d'une foule de spéculations d'une moins grande importance.

Déjà, dans un autre livre [2], j'avais posé en peu de

[1] Laplace.

[2] *Exposé d'un système philosophique*, page 399; troisième édition, 1 vol. in-8°, à Paris, chez Borrani et Droz, libraires, rue des Saints-Pères.

mots les bases des principales réformes à opérer dans les mathématiques.

Me dira-t-on que le mathématicien ne doit point se lancer dans la métaphysique; que le géomètre, par exemple, doit accepter les données de la géométrie, telles qu'elles se manifestent dans le sentiment général, universel; qu'ainsi, d'après les notions universelles, un cercle peut égaler en étendue un carré, un triangle, etc., une ligne courbe peut égaler une ligne droite; que, par conséquent, le géomètre doit admettre ces notions-là et raisonner dans l'hypothèse de leur vérité, de leur réalité?

Je répondrais que la science ne se conforme point toujours aux idées communes, universelles. La physique, par exemple, rejette bien des données, bien des croyances générales, reconnues fausses par la spéculation scientifique. Il en est ainsi dans l'astronomie. On a pensé, et généralement encore on pense que la terre est immobile; ce qui n'empêche point les astronomes de proclamer que la terre tourne autour du soleil. Je pourrais citer bien d'autres exemples de divergences entre la science et le sentiment universel.

La science des mathématiques doit-elle être vraie, exacte, rationnelle? Si oui, n'admettons donc en elle aucun principe, aucune théorie qui soit contraire à la raison, qui soit irrationnel[1].

[1] J'ai attaché divers sens au mot *irrationnel*, dans le cours de ce traité. Dans le chapitre VII, pour me conformer à l'usage, j'ai appelé *quantités irrationnelles*, soit des grandeurs réelles, possibles, mais qui ne sauraient être exprimées exactement en unités de telle

Qu'on ne m'objecte pas non plus que telles réformes que je sollicite n'auraient pas d'utilité vraîment pratique. L'intelligence a ses besoins comme le corps. Ce serait ravaler l'homme que de le regarder comme pouvant être complétement satisfait quand sa raison ne l'est pas. On a défini l'homme, *un animal raisonnable;* c'est la raison surtout qui le distingue, le sépare de la brute : Faut-il donc qu'il développe complétement toutes ses facultés, excepté celle qui le fait homme, pour ainsi dire?

Toutes ces discussions qui ont roulé sur la théorie des parallèles ont-elles vraiment une utilité pratique? Non : pourtant on sait l'importance qu'y ont attachée et y attachent encore les géomètres.

Faut-il s'étonner, d'après cela, que je désire la rectification des erreurs essentielles que je signale ; que j'entreprenne de porter la lumière rationnelle sur les parties de la science qu'elle n'a pas encore éclairées?

Et lorsque je dis aux savants : prenez garde, telle doctrine que vous professez est contraire à la raison, fermeront-ils l'oreille à cet appel? Non, certes !

sorte, soit des expressions qui ne peuvent représenter aucune réalité, des grandeurs réelles quelconques. Mais, ailleurs, dans les autres cas, j'ai toujours employé le mot *irrationnel* dans le sens de l'impossibilité absolue. — Ainsi, quand je dis, par exemple, que le rapport d'une courbe à une droite est *irrationnel,* ou bien que telle équation est *irrationnelle,* comme supposant un tel rapport, je n'entends point seulement qu'il n'y a pas de commune mesure entre la courbe et la droite considérées, qu'il est par conséquent impossible d'avoir l'expression exacte de leur rapport: j'entends qu'il n'y a, en ce cas, aucun rapport de grandeur, aucune réalité; que l'équation est absolument chimérique, impossible.

D'ailleurs, il y a presque toujours certains avantages pratiques, directs ou indirects, à réformer des erreurs.

Parmi les réformes que je propose, il en est qui mettront un terme à la recherche de théories chimériques, de solutions impossibles. Il en résultera une épargne de temps et d'efforts qui pourront être fructueusement employés.

Il est encore un point de vue d'utilité pratique, auquel on doit envisager les réformes que je demande; le voici :

On ne saurait contester l'utilité des mathématiques : elles offrent des avantages directs; elles exercent, à plusieurs égards, une heureuse influence qu'il faut tâcher d'accroître, de rendre plus générale. Je dirai, à la fin de ce livre, sous le titre de *Réflexions au sujet de l'enseignement des mathématiques,* quels seraient, suivant moi, les moyens les plus efficaces pour atteindre ce but; mais, dès maintenant, j'assure qu'un des moyens de faire aimer l'étude des mathématiques et d'attirer vers elles, serait de purger cette science des *irrationalités* qui la déparent et l'obscurcissent, d'en écarter aussi bien des difficultés qui n'y sont pas inhérentes.

Quand même la raison, la vérité serait seule intéressée à la réforme scientifique que j'appelle de mes vœux, cette réforme s'opérerait tôt ou tard. La raison est impérieuse : il faut la contenter. Ceux qui font fi de ses exigences sont eux-mêmes sous sa loi, qu'ils semblent s'efforcer d'enfreindre, de décliner. Ce sont les *empiriques* de la science; mais l'empirisme sera vaincu par le progrès; le rationalisme triomphera un jour.

Un jour peut-être je donnerai plus d'extension, plus de développement à ce livre. Tel qu'il est, il suffit, je crois, pour remplir le but que je me propose maintenant, qui est surtout d'appeler l'attention sur les points essentiels dont je me suis occupé, sur les réformes que je sollicite.

Le traité que j'offre au public était terminé, quand j'ai eu connaissance d'un écrit intitulé : *Réforme de la géométrie*, par M. Bailly. J'ai cru devoir consacrer un dernier chapitre à l'examen critique de cette œuvre et de sa *Théorie de la raison humaine*, sur laquelle il l'a basée.

Je me regarde comme inférieur en savoir aux hommes dont j'ai critiqué les spéculations, les doctrines. — Je suis bien loin de prétendre à l'infaillibilité. Les plus grands génies se sont égarés : comment ne craindrais-je pas d'avoir payé tribut à l'erreur ! Mais, si j'ai erré dans les opinions que j'ai émises, je puis, du moins, assurer que je ne les ai pas adoptées légèrement, que je ne me suis décidé à les produire qu'après les avoir passées au creuset d'une profonde et persévérante méditation. Ma critique n'a pas cessé d'être circonspecte et modérée : si mon œuvre est critiquée, qu'elle le soit sans passion, sans acrimonie ! L'amour seul de la vérité m'a fait prendre la plume : qu'il en soit ainsi des hommes qui croiront devoir rejeter mes doctrines !

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

EXPOSÉ DES VRAIS PRINCIPES DES MATHÉMATIQUES.

CHAPITRE PREMIER. — DE L'OBJET DES MATHÉMATIQUES.

CHAP. II. — DU FONDEMENT DES MATHÉMATIQUES.

CHAP. III. — DES PRINCIPES PREMIERS, OU AXIOMES RATIONNELS DES MATHÉMATIQUES.

CHAP. IV. — DU BUT ET DES MOYENS DU RAISONNEMENT.

CHAP. V. — DES SPÉCULATIONS CONCERNANT LA MESURE DU CERCLE, CELLE DE SA CIRCONFÉRENCE ET CELLE DE LA SPHÈRE.

CHAP. VI. — DES DIVERSES THÉORIES DES PARALLÈLES.

CHAP. X. — DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAP. XI. — DES APPLICATIONS RATIONNELLES ET DES APPLICATIONS IRRATIONNELLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL. — DES COURBES RATIONNELLES ET DES COURBES IRRATIONNELLES.

CHAP. XII. — DES MATHÉMATIQUES MIXTES.

AVIS AU LECTEUR

Le lecteur est prié de consulter l'ERRATA placé à la fin du livre.

EXPOSÉ

DES VRAIS

PRINCIPES DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE I

DE L'OBJET DES MATHÉMATIQUES

La science des mathématiques a été définie « la « science des rapports de grandeur ou de nombre « que peuvent avoir entre elles toutes les choses « qui sont susceptibles d'augmentation et de dimi- « nution. »

J'accepte cette définition, qui, tout bien pesé, me paraît satisfaisante.

On a divisé les mathématiques en deux classes : celle des mathématiques pures et abstraites, et celle des mathématiques mixtes, ou physico-mathé- matiques. La première division comprend l'arith- métique, la géométrie et l'algèbre, qui est une sorte d'arithmétique abrégée. La classe des mathé- matiques mixtes, plus nombreuse, comprend notamment la mécanique, l'astronomie, l'optique, l'acoustique, la musique.

Je ne m'occuperai des mathématiques mixtes qu'au point de vue rationnel.

Les mots *nombre*, *quantité*, *grandeur*, ne sont pas synonymes.

Le mot *nombre* exprime généralement une ou plusieurs unités, soit abstraites, soit concrètes. Ainsi : *trois*, *quatre*, *dix*, *cinq cents; cinq hommes*, *vingt tables*, *trente mètres*, sont autant de nombres, les premiers *abstraits*, les autres *concrets*.

Par *quantité*, on exprime, en général, ce qui se mesure, se pèse, ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution, soit qu'on le regarde, soit qu'on ne le regarde pas comme constituant une ou plusieurs unités.

Grandeur est à peu près synonyme de *quantité*. Cependant on n'emploie guère ce mot pour exprimer une ou plusieurs unités abstraites ou indivisibles. Ainsi *vingt*, *trente*, *quinze hommes*, *dix instruments*, *cent ouvrages*, ne s'expriment pas, du moins en général, par le mot GRANDEUR.

M. Busset, dans un Mémoire couronné par l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Rouen, en 1842, sur lequel je reviendrai, a reproché à l'*École* de ne pas employer les mots *nombre*, *quantité*, *grandeur*, dans leurs véritables acceptions. La véritable acception de ces termes, peut-on répondre à M. Busset, est celle qui est la plus usitée, le plus généralement admise, du moins par les personnes éclairées, lettrées. En effet, par eux-mêmes, les mots n'ont aucun sens, ils n'ont que la signification qu'ils ont reçue : si donc l'École, c'est-à-dire le plus grand nombre des mathématiciens, donne aux termes en question les significations critiquées par M. Busset, ces significations-là sont les vraies, c'est-à-dire doivent prévaloir sur celles qu'il leur veut substituer. L'important, pour la science, c'est que les savants s'entendent bien et soient bien compris; et je crois d'ailleurs que, sous ces rapports, le langage de la science s'accorde assez bien avec le langage vulgaire. M. Busset reconnaît lui-même que le sens vulgaire n'est pas conforme à la signification qu'il donne aux mots dont il s'agit. Alors sur quoi se fonde-t-il pour la préconiser? Il dit qu'elle est rationnelle : je ne vois pas ce que la raison peut apprendre à ce sujet.

Parmi les savants, on a discuté sur la théorie des nombres. Certaines anomalies aperçues dans les spéculations numériques, anomalies dont je m'occuperai dans le cours de ce traité, ont fait dire qu'une réforme dans la science et dans l'enseignement était indispensable, que la métaphysique de la science mathématique était à faire. Laplace disait qu'il fallait *refaire* les mathématiques, *les placer sur un nouveau piédestal;* il ajoutait : « Il serait « à désirer que ce fût l'œuvre d'un homme nouveau, « qui fût étranger aux mouvements et aux progrès « des sciences et n'en connût que les premiers élé- « ments. »

« Pourquoi, disait M. Destutt-Tracy dans ses « *Éléments d'Idéologie*, chap. IX, pourquoi la science « des quantités abstraites nous donne-t-elle les rè- « gles de calcul les plus savantes et les plus sûres, « sans nous dire ni comment nous nous formons « l'idée de nombre, ni pourquoi nous avons des « idées abstraites, ni quelle est la cause première de « la justesse d'une équation?

« Pourquoi la géométrie ne nous enseigne-t-elle « ni comment nous apprenons à connaître la pro- « priété générale des corps, ni en quoi elle consiste « séparée de ces corps, ni pourquoi, seule de toutes « les propriétés des corps, elle est susceptible d'être « le sujet d'une science qui influe sur toutes les « autres? »

Le même auteur assure que, descendant d'échelons en échelons jusqu'au fond de tout, il a trouvé que le magnifique édifice de nos connaissances, qui lui avait présenté une façade imposante, manquait par sa base, et reposait sur un sable toujours mouvant.

Lacroix écrivait, en 1816 : « Je confesse mon « ignorance sur la manière dont les idées de nombre « et de grandeur s'acquièrent. » — Et pourtant il écrivait cela longtemps après la publication de la théorie des nombres de Legendre.

M. Busset aussi proclame la nécessité d'une nouvelle théorie des nombres. Il faut, suivant lui, trouver l'*essence*, la *nature* du nombre, *inconnue jusqu'ici.* « Pour qu'une science, dit-il, soit consti- « tuée, il faut que, comme l'astronomie, elle repose « sur un principe unique, lequel, servant de lien à « tous les phénomènes dépendant de cette science, « puisse les expliquer tous. Il faut donc chercher un « principe unique aux mathématiques. Ce principe « fondamental, c'est l'essence du nombre. » (Mémoire cité plus haut.)

M. Busset se met à l'œuvre, et affirme cette proposition :

Le principe concret, ou autrement l'unité concrète purement intellectuelle, réside dans la sphère. C'est dans la sphère qu'est le principe de la science de l'étendue; car c'est en elle que résident l'unité et l'uniformité.

L'auteur se fonde sur les considérations suivantes :

« 1° La sphère a un volume plus grand que celui « des polyèdres ou de toute autre construction ou

« conception qui aurait une surface égale à la « sienne ;

« 2° Elle est la plus simple de toutes les figures « rentrantes ;

« 3° Elle est uniforme, c'est-à-dire conforme, « égale, semblable en toutes ses parties;

« 4° Dieu a donné la forme sphérique à ces « grandes créations qui gravitent par milliers dans « l'espace ;

« 5° Enfin la sphère mathématique est rationnel- « lement l'image de l'infini, UNITÉ universelle. »

L'auteur reconnaît en outre des principes secondaires ou des lois (abstraites / intellectuelles) des sciences mathématiques.

Un de ces principes est le principe de continuité qui, dit-il, « est une loi universelle à laquelle sont « soumis tous les êtres de la nature, comme aussi « toutes nos créations, toutes nos conceptions indi- « viduelles... Le principe de continuité existe donc « *actuellement* dans le cercle (fig. 1), et il doit être « considéré à deux titres distincts :

« 1° Dans l'espace proprement dit, ou l'aire S;

« 2° Et dans la ligne C, qui, à titre de limite, « prend le nom de circonférence ou périphérie. »

M. Busset dit *actuellement*, « parce que le cercle « renferme *virtuellement* plusieurs autres lois ou « principes secondaires inhérents à sa nature cir-

« culaire, lesquels, étant envisagés sous le point de « vue purement rationnel, servent de base à tous les « raisonnements mathématiques.

« Ces lois ou principes secondaires, classés dans « l'ordre simple des idées qui s'attachent à leurs « relations et à leurs dépendances mutuelles, sont « les suivants :

« 1° Le principe rectiligne;

« 2° La loi ou le principe de dualité;

« 3° Le principe d'égalité absolue;

« 4° La loi ou le principe de perpendicularité;

« 5° La loi ou le principe de parallélisme;

« 6° La loi ou le principe de l'équilibre;

« 7° Enfin le principe d'*opposition*, dans lequel « rentre le précédent, et que la philosophie moderne « a nommé principe d'*antagonisme* ou de *contra-* « *diction.*

. . . .

« Le principe rectiligne est essentiellement de « nature abstraite, et dès lors arithmétique.

« Considéré dans le diamètre D d'un cercle « (fig. 2), il y produit *actuellement*, savoir :

« 1° La dualité;

« 2° Et l'égalité absolue.

« La dualité a deux titres différents : d'abord « dans l'étendue superficielle qui, représentée par « $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$, constitue le premier nombre scientifique

« dans l'expression analytique la plus simple, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
« en outre, dans la dualité linéaire, mais toutefois « géométrique et concrète, qui est $\frac{1}{2}$C $= \frac{1}{2}$C, dont « l'expression analytique la plus simple est également $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

. . . .

« Actuellement, de même que dans un cercle il « existe virtuellement une multitude de lignes qui, « sous le nom de diamètre, en sont respectivement « la mesure; tout diamètre est virtuellement aussi « divisé par le centre du cercle en deux parties « identiques, R + R = D; ce qui nous donne encore « ici $\frac{1}{2}$D $= \frac{1}{2}$D; et en divisant par D, l'équation devient $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

. . . .

« Le principe rectiligne, considéré dans la dua- « lité diamétrale et réunie au principe de perpendi- « cularité (fig. 3), détermine actuellement, savoir:

« 1° La double raison double dans l'unité linéaire « arithmétique (fig. 3).

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OR}' = \mathrm{OR}'' = \mathrm{OR}''';$$

« 2° La double raison double dans l'unité angu- « laire géométrique $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha'''$.

« C'est à ces deux espèces d'unités de nature es- « sentiellement différente, que l'on rapporte tout « dans la science de l'étendue.

« La dualité diamétrale perpendiculaire (fig. 4) « implique aussi virtuellement :

« 1° Le double parallélisme des cordes RR', $R''R'''$, « et RR''', $R'R''$;

2° Et l'égalité absolue soit des cordes $RR' = R'R'''$ « $= RR''' = R'R''$; soit des angles à la circonférence « rence $R'RR''' = RR'R'' = R'R''R''' = R''R'''R$, « qui sont respectivement égaux à ce que j'ai nommé « (dit l'auteur) la double dualité angulaire, laquelle se « trouve au centre du cercle, ou $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha'''$.

« C'est la réunion de ces divers éléments angu- « laires et linéaires pris à la limite du cercle, qui « constitue l'unité arithmétique de la mesure des sur- « faces, c'est-à-dire le *carré ;* et celui-ci doit cette « propriété à l'égalité absolue de tous les éléments « homogènes que l'on peut considérer en lui.

« Ainsi l'unité arithmétique synthétique (le carré) « et l'unité transcendante analytique (le cercle) se « trouvent dans une corrélation absolue, dont le rap- « port, bien que non exprimable exactement en chif- « fres, n'en est pas moins constant et imprescriptible.

« Le principe de l'équilibre, qui tient en même « temps aux deux lois de dualité et d'égalité abso- « lue, existe dans le cercle en imaginant le point « d'appui au centre. Ainsi, l'équilibre peut y être « considéré soit par rapport à la surface, soit par « rapport à chaque diamètre en particulier.

« Enfin le principe d'*antagonisme* ou de *contra-* « *diction*, lequel rentre dans le principe de dualité...
« Ce principe régit les rapports de deux qualités « homogènes quelconques, rapports qui rentrent « dans ces trois formules :

$$a=b,\ a>b,\ a<b,$$

M. Busset, continuant cet ordre d'investigations, arrive à trouver que, « à l'exception du principe de « perpendicularité, le triangle offre tous les princi- « pes énumérés précédemment, sans en excepter ni « celui de l'équilibre, ni même celui du cercle.

« En effet, dit-il, tout triangle peut être inscrit « dans un cercle; il peut aussi lui être circonscrit.

« 1° Dans le premier cas, c'est par la combinaison « de la raison double arithmétique et du principe de « perpendicularité, puisque les perpendiculaires éle- « vées au milieu des côtés se croisent au centre du « cercle, et les côtés sont des cordes.

« 2° Dans le second cas, c'est par la combinai- « son de la raison double géométrique et du même « principe de perpendicularité, puisque alors c'est la « division en deux parties égales des trois angles « qui donne le centre du cercle, et les côtés du « triangle sont des tangentes.

« Donc le principe arithmétique et le principe « géométrique sont la dualité de moyens qui, com-

« binés par la raison double, produisent l'inscription « et la circonscription du triangle au cercle; et, « comme l'a remarqué M. Poinsot, le principe de « dualité manifeste en tout sa puissance. »

Ensuite M. Busset applique au carré les développements dans lesquels il est entré à l'égard du triangle.

« Le carré, dit-il, réunit en lui (fig. 5) tous les « principes précédemment énumérés; et, comme le « triangle,

« 1° En l'inscrivant dans le cercle, ses côtés sont « des cordes.

« 2° En le circonscrivant au cercle, ses côtés de« viennent des tangentes.

« 3° Enfin, dans la simultanéité de ces deux opé« rations, on trouve la raison double superficielle, « dont les éléments périmétriques ou linéaires ne « peuvent avoir une commune mesure arithmétique.

. . . .

« Le carré, par l'union seule de ses points actuels « opposés, OO_2, O_1O_3, se décompose en huit trian« gles respectivement égaux quatre à quatre, savoir : « $S' = S'' = S''' = S''''$, pris un à un; $(S' + S'')$ « $= (S'' + S''') = (S''' + S'''') = (S'''' + S')$, pris « deux à deux.

« Ainsi, le carré est devenu l'unité arithmétique « de la mesure des surfaces, parce qu'il doit aux

« principes de parallélisme, de perpendicularité et « d'égalité absolue, l'unité de ses éléments homogè- « nes, et qu'on y trouve *deux* fois *deux* êtres iden- « tiques de toute nature, savoir :

« 2 fois deux côtés;

« 2 fois deux angles droits, unités d'angles;

« 2 fois deux triangles simples;

« 2 fois deux triangles composés;

« 2 fois deux demi-diagonales,

« qui sont en proportion continue avec les côtés du « carré et les diagonales, c'est-à-dire qu'on a :

$$OC : OO_1 :: OO_1 : OO_2.$$

« En chiffres :

$$1 : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 2.$$

Ce spécimen de la théorie de M. Busset suffit pour en donner une idée.

Or cette sorte de spéculations, quels que soient ses développements, peut-elle réformer utilement la théorie des nombres? Y trouve-t-on cette base qu'on cherche, ce principe unique qu'on dit nécessaire pour asseoir la science des mathématiques, et faire disparaître les anomalies, les obscurités, les mystères qu'elle a pu présenter jusqu'ici ?

Quant à moi, je ne le crois point. Ces spéculations-là me paraissent sans portée réelle, et même, à quelques égards, puériles.

Pourquoi donc, d'abord, pour qu'une science soit constituée, faut-il qu'elle repose sur un principe unique? Si elle repose sur un plus ou moins grand nombre de principes qui, tous, soient, individuellement, incontestables, rationnels, évidents par eux-mêmes, que lui manquera-t-il pour qu'elle soit certaine, pour qu'elle soit constituée?

Dira-t-on que, dans ce cas, il n'y aurait pas un *système*, pas d'*unité* dans la science? — Pourquoi donc? — Si, au moyen d'un certain nombre d'axiomes, on démontre plusieurs propositions qui s'accordent entre elles, ou ne se contredisent pas, et au moyen desquelles on prouve d'autres propositions qui s'accordent, se confirment, est-ce qu'il n'y aura pas un lien entre toutes ces propositions? Est-ce qu'elles ne constitueront pas un ensemble harmonieux, un système? — Il y a plus, si un système est vraiment démontré, il est fondé sur plusieurs axiomes ou principes évidents par eux-mêmes; car on ne démontre ou ne prouve une proposition qu'à l'aide de plusieurs autres, du moins d'après le sens généralement donné aux mots *démontrer*, *prouver*.

L'astronomie est-elle vraiment fondée sur un principe unique? L'attraction ou gravitation de

Newton suffit-elle pour expliquer tous les mouvements, toutes les révolutions des astres? Non, car, en vertu de l'attraction seule, les astres se précipiteraient vers le centre d'attraction : aussi Newton a-t-il supposé, en outre, que les astres en mouvement étaient soumis à une force plus ou moins grande d'impulsion en ligne directe. Les orbites plus ou moins elliptiques qu'ils paraissent décrire dans l'espace seraient la résultante de ces deux forces.

Au reste, l'attraction et la force d'impulsion ne sont que des hypothèses ingénieuses pour expliquer les mouvements des corps célestes; elles ne constituent point des principes rationnels, des lois évidentes. Pourquoi, si des forces pouvaient exister, agir sur des corps, ne supposerait-on pas qu'au lieu de deux forces combinées, il y en a trois, cent, mille, et plus encore, d'où résultent les révolutions des corps célestes? Et qui prouvera, qui peut *rationnellement* affirmer que c'est la même loi, la même force, ou la même combinaison de force qui doit faire graviter, tomber les corps, et déterminer les mouvements des astres?

La science des mathématiques, d'après l'auteur, est fondée sur des axiomes rationnels, tels que ceux-ci : *Le tout est plus grand que sa partie, deux quantités égales à une troisième sont égales entre* *elles.* Eh bien, pour reconnaître les axiomes, est-il donc besoin de considérer le cercle comme l'*unité analytique transcendante?* Est-il besoin de voir dans le triangle, dans le carré, outre leurs *points actuels et patents*, les *points virtuels et latents* que signale M. Busset; de reconnaître avec lui que le carré, par l'union seule de ses *points actuels opposés*, se décompose en huit triangles respectivement égaux; que le carré a *deux* fois *deux* côtés, *deux* fois *deux* angles droits, *deux* fois *deux* triangles simples, *deux* fois *deux* triangles composés, *deux* fois *deux* demi-diagonales? Qu'importent toutes ces circonstances, ces considérations pour reconnaître les axiomes? Et si les axiomes sont vrais, sont rationnels, pourquoi la théorie des nombres n'est-elle pas rationnelle?

Qu'est-ce qu'on entend, qu'est-ce que l'auteur entend par la nature ou l'essence du nombre? Est-ce que tout le monde ne sait pas, ne conçoit pas le nombre? Où chercher son essence ailleurs que dans notre conception?

Quand j'ai vu que, dans un triangle, il y a trois angles, trois côtés, une surface, un périmètre, en tout *huit êtres distincts*, suivant le langage de M. Busset, sais-je mieux qu'auparavant ce que c'est que l'essence ou la nature du nombre? Pour concevoir même le nombre abstrait, mathématique, il n'est point besoin de s'alambiquer ainsi l'esprit; il n'est point utile de considérer, dans le triangle, et ses points patents et ses points latents; il n'est point nécessaire de reconnaître le principe de dualité dans le cercle, dans le triangle, dans le carré; ni le principe de continuité, ni le principe d'opposition, ni le principe d'équilibre. Nul besoin non plus de voir des unités dans la sphère et dans le cercle, à quelque point de vue que ce soit. On verra d'ailleurs par la suite de ce traité, que la plupart des considérations qui ont porté M. Busset à consacrer ces principes d'unités ne sont point rationnelles.

Après que j'ai reconnu les entités abstraites de M. Busset, suis-je donc plus certain que le nombre n'est pas une chimère? Non vraiment!

Au reste, je soutiens, j'ai soutenu ailleurs [1] que le nombre ne peut être une qualité réelle de ce qui est; il n'est que dans les conceptions. Quels que soient des êtres, substances ou modes, réalités ou abstractions, ils ne peuvent avoir en eux la qualité d'être plusieurs, *deux, trois*, *cent*, *mille*, etc. L'unité même n'est pas une qualité réelle : nul n'a vraiment en soi la qualité d'être *un*. Si donc on cherche l'essence du nombre considéré

[1] *Exposé d'un système philosophique*, chap. x, p. 143.

comme réalité, et pour s'assurer de cette réalité, c'est chercher l'impossible. Mais la science n'a pas besoin, pour se fonder, que le nombre soit réel; il suffit qu'il soit conçu, pour qu'on puisse asseoir la science des nombres, et, je le répète, nous le concevons aisément, nous en avons une idée claire, que ne saurait rendre plus lumineuse aucune théorie.

J'accorde qu'il faut une métaphysique pour éclairer la science des mathématiques. Il est surtout essentiel de ne pas y apporter une métaphysique fausse; car une philosophie erronée peut y introduire de graves erreurs. Si, par exemple, la métaphysique admet la possibilité d'une grandeur infinie, d'une quantité sans bornes, ou bien d'une quantité infiniment petite, de telles quantités ou grandeurs figureront dans la théorie mathématique, et la raison sera profondément blessée. Si la métaphysique rejette les axiomes rationnels, n'admet que des *vérités sensibles* ou d'*expérience*, la science mathématique ne sera pas fondée sur des principes rationnels et péchera ainsi par sa base.

Il y a lieu de réformer les mathématiques en bien des points plus essentiels que ceux qui ont fait proclamer la nécessité d'une réforme, et je montrerai que l'on peut satisfaire en tous points la raison sans recourir aux spéculations que je viens de critiquer.

M. Busset reproche à l'École de considérer 2, 3, 4, 5, etc., ou *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, etc., comme des nombres réels, non comme des signes ou symboles. Je ne crois point que ce reproche soit mérité. Souvent on dit que 2, 3, 4, 5, etc., sont des nombres, mais on entend dire que 2, 3, 4, 5, etc., *expriment des nombres.*

M. Busset, en taxant l'École d'une erreur si palpable, se l'explique en jugeant qu'elle prend le nombre pour un substantif, tandis que c'est un adjectif.

Un nom de nombre peut être considéré comme un substantif ou comme un adjectif : comme substantif, en ce qu'il nomme, dénomme; comme adjectif, en ce qu'il modifie, qualifie une dénomination, une appellation. Si je dis *trois, quatre, cinq*, etc., sans rien ajouter à ces mots, ils expriment des noms ou substantifs abstraits. Si je dis : *trois hommes*, *trois arbres*, je puis considérer *trois* comme modifiant *hommes, arbres,* ou *hommes, arbres*, comme modifiant *trois*, dans le sens grammatical du mot *modifier*.

Il est même des noms de nombres abstraits qui ne sont pris que substantivement; tels sont les mots *million*, *milliard;* car on ne dit point *million hommes*, *milliard arbres*, et l'on dit *un million*, *deux millions, trois milliards.*

Les *desiderata* émis par M. Destutt-Tracy, et que j'ai déjà cités plus haut, sont-ils justes, fondés?

Il peut n'être pas inutile, il est du moins intéressant de connaître l'origine des notions de nombre. Voici comment je me l'explique :

Ayant envisagé des objets, des corps, comme *plusieurs*, comme *deux*, comme *trois*, par exemple, et cela relativement à quelque objet qu'on a en même temps envisagé comme un (car la pluralité ne peut se concevoir que par opposition à l'unité), on a pu ensuite appliquer successivement des noms à ces objets ainsi envisagés. Supposons que ces noms aient été *un*, *deux*, *trois*, les mots *un*, *deux*, *trois*, ont donc dénommé ces objets en tant que *un*, *deux*, *trois*. Soit avant, soit après ces conceptions, on a pu aussi considérer et dénommer ces mêmes objets sous quelque autre rapport. Imaginons qu'ils aient été, sous certains rapports de similitude ou d'analogie, appelés chacun du nom d'*homme*. On comprend qu'après ces diverses conceptions et dénominations, on ait ajouté le nom d'*homme* aux noms de nombres, et qu'on ait dit : *un homme*, *deux hommes*, *trois hommes*, ou bien *homme un*, *hommes deux*, *hommes trois*.

Après avoir appliqué un même nom de nombre comme *un*, ou *deux*, ou *trois*, à divers objets ou groupes d'objets, on a pu nombrer ces nombres eux-mêmes, et dire : *deux un*, ou *deux deux*, ou *deux trois*, ou *trois trois*. On comprend aussi qu'on ait appliqué un seul mot à tel ou tel de ces nombres composés, qu'on ait dit, par exemple, *quatre* au lieu de *deux deux*, ou *six* au lieu de *deux trois ;* on conçoit de plus que *deux* et *trois* réunis aient été compris sous le mot *cinq*, puis *deux cinq*, ou *cinq* et *cinq*, sous le mot *dix ; deux dix* sous le mot *vingt; deux vingt* sous le mot *quarante; cinq vingts* sous le mot *cent*, etc., etc.

Jusque-là il n'y a pas, à vrai dire, la conception de ce qu'on appelle un *nombre abstrait;* lequel implique la généralité, l'universalité conçue.

Cette conception-là, cette idée générale d'un nombre, a nécessité primitivement une affirmation ou une négation. Ainsi, on a pu considérer, juger, par exemple, que *deux* quelconques ajoutés à *deux* quelconques formaient *quatre* aussi quelconques; et l'on a eu, par la conception même de ce principe, l'idée générale de *deux*, et l'idée générale de *quatre*. Il n'y a pas de mystère dans cette conception d'universalité, pas plus pour les nombres que pour d'autres qualités ou attributs. Seulement, on n'a pu l'obtenir qu'après avoir conçu des nombres particuliers et leur avoir donné des noms. Toute généralisation implique l'emploi de noms, de signes. En effet, il n'y a pas un objet ou qualité en général : il faut donc, pour généraliser, employer des signes qui représentent dans l'esprit la généralité, l'universalité qui ne se trouve dans aucun être. Toutefois, ces signes qui expriment et représentent ainsi l'universalité conçue, s'appuient, pour ainsi dire, dans la pensée, sur plusieurs objets dont on a idée et que l'on juge semblables ou analogues sous quelque rapport.

Maintenant, faut-il, réveillant une vieille querelle, se demander si l'idée générale est *purement nominale?* J'attache peu d'intérêt à cette question, qui, d'ailleurs, ne pourrait être résolue qu'à la condition de bien préciser ce qu'on entend ici par *purement nominale.* Je consens, néanmoins, à ce qu'on applique cette locution de *purement nominale* à l'idée générale de nombre, pourvu qu'il soit bien entendu que le nom a un sens, exprime une idée, et que cette idée attachée au mot est conçue au moyen de nombres attribués à des objets particuliers, bien que ces nombres ne puissent être des qualités réelles de ces objets.

J'arrive aux questions suivantes, dont M. Destutt-Tracy appelait la solution : « Pourquoi avons-« nous des idées abstraites? — Quelle est la cause « première de la justesse d'une équation? — Pour-« quoi, seule de toutes les propriétés des corps, « l'étendue est-elle susceptible d'être le sujet

« d'une science qui influe sur toutes les autres? »

La première de ces questions trouvera, dans le chapitre suivant, la seule solution rationnelle qu'elle puisse recevoir.

Quant aux deux autres questions, j'avoue qu'elles sont, à mes yeux, puériles.

1° Comment vouloir qu'on dise pourquoi, par exemple, deux et deux font quatre, pourquoi on peut affirmer l'équation

$$5+3+2=10.$$

Pourquoi aussi de cette équation on peut tirer celle-ci :

$$5+3=10-2=8,$$

ou celle-ci :

$$5+2=10-3=7.$$

Et d'autres encore.

Il n'y a pas de *pourquoi* à donner ici. L'égalité en question est nécessaire en soi, évidente en soi.

Il est visible qu'il est impossible de démontrer que plusieurs quantités réunies peuvent égaler une autre quantité, ou plusieurs autres quantités réunies; que, dans ce cas, si l'on retranche de l'une et de l'autre de ces sommes égales, une même quantité, les restes seront égaux; que si l'on ajoute à des sommes égales une même quantité, elles seront encore égales entre elles après cette augmentation; mais comment mettre en doute de telles vérités ?

Est-ce que M. Busset, qui a pris au sérieux la question, a pu vraiment donner une raison de cette nécessité, de cette évidence? Non certes!

A-t-on montré le pourquoi de la justesse d'une équation quand on a dit que l'équation est fondée sur le principe de dualité, sur le principe d'égalité absolue considérée dans le principe de dualité ? Pour moi, je ne vois là qu'une vaine logomachie.

Tout ce que dit, à ce sujet, M. Busset, ne saurait rien ajouter à l'évidence rationnelle qui reconnaît la possibilité d'une équation en général, et l'évidence de telle équation en particulier.

Je n'en excepte point ses raisonnements pour montrer que zéro est virtuellement un point sur lequel se font équilibre les deux membres d'une équation. Je ne saurais croire que des spéculations aussi alambiquées que celles-ci soient de nature à éclairer les principes de la science, et à en faciliter l'enseignement. Ce n'est point ainsi que l'on réhabilitera les mathématiques et qu'on vaincra les répugnances qui en éloignent tant d'esprits.

Au reste, M. Busset est de l'école philosophique si nombreuse qui fonde la rigueur mathématique sur les principes intellectuels ou vérités éternelles qui, suivant elle, subsisteraient *avant tout dans l'entendement divin;* et il ne manque point d'invoquer ce motif de certitude. « Nous ne pouvons, dit-« il, faillir dans les conceptions logiques puisées « dans ces principes. » — Pour moi, on le verra dans le chapitre suivant, je ne saurais fonder mes convictions sur une semblable base.

2° « Pourquoi, seule de toutes les propriétés des « corps, l'étendue est-elle susceptible d'être le sujet « d'une science qui influe sur toutes les autres? » — Puérile question à laquelle la raison n'accorde aucune autre réponse que celle-ci : « Cela est nécessaire. »

M. Destutt-Tracy a aussi posé cette question : « Pourquoi la géométrie ne nous apprend-elle pas « en quoi consiste la propriété générale des corps « (l'étendue) séparée des corps? »

Il me paraît que les géométries, en général, disent à peu près ce qu'elles peuvent dire à ce sujet.

Il est visible qu'une surface, une ligne sans largeur, un point sans étendue, ne sont pas des êtres réels; qu'ils ne peuvent être regardés que comme des qualités, des attributs de corps envisagés à certains points de vue, sous certains rapports. Ces entités que considère la géométrie sont fictives ; ce sont des qualités abstraites. Les surfaces sont réelles en ce sens seulement que, s'il y a des corps, des substances étendues, finies, elles offrent des faces, des étendues superficielles. De plus, si la surface d'un corps n'est pas courbe dans toute son étendue, ce corps a quelque coin, quelque angle. Or, un coin offre, dans l'arête, une ligne sans largeur; un angle, à son sommet, présente un point sans étendue. Supposez un corps s'avançant vers l'arête ou vers l'angle d'un autre corps, en présentant à cette arête ou à cet angle une face plane ou courbe; supposez que la surface ait ainsi franchi toute la distance qui la séparait de l'arête ou du sommet de l'angle : il ne pourra pas y avoir contact *matériel*, *réel*, entre la surface et l'arête, ni entre la surface et le sommet de l'angle. On conçoit donc ici un contact purement mathématique, un contact seulement en ce sens qu'il n'y aura aucune distance entre la surface et l'arête, aucune distance entre la surface et le point angulaire. Je m'explique de cette manière qu'on ait pu arriver à la conception légitime de la ligne, du point et du contact mathématiques.

Toutefois, il a fallu auparavant percevoir, concevoir des lignes et des points non mathématiques, des bandes d'une très-petite largeur, des points d'une très-petite dimension ; car on ne se représente pas une ligne et un point mathématiques, une ligne vraiment sans largeur, un point vraiment sans étendue ; or, une conception d'un objet qu'on ne se représente pas doit toujours être fondée, s'appuyer, pour ainsi dire, sur quelque représentation, indépendamment des mots, des signes qu'elle nécessite.

On a pu aussi concèvoir la ligne et le point mathématiques sans considérer des angles, des coins, sans concevoir des points angulaires, des arêtes. Il se peut, en effet, que d'abord l'on pense que telle ligne d'une largeur fort petite est absolument sans largeur ; que tel point d'une étendue minime n'a aucune étendue. Ces erreurs d'appréciation sont possibles, et, même après qu'on les a reconnues, l'idée d'une ligne sans largeur, d'un point inétendu peut rester dans l'esprit de la personne qui les a commises. Cette personne peut supposer d'autres lignes qui soient sans largeur, d'autres points qui soient inétendus.

Comment avons-nous pu abstraire une surface, la distinguer du corps auquel elle appartient ? Je me l'explique aussi. Des corps paraissent se toucher en telle partie (extérieure), non en telle autre ; il nous paraît que nous avons diverses sensations en diverses parties (extérieures) de notre corps ; que, touchant un corps, nous sentons telle partie (extérieure), non telle autre partie (extérieure) de ce corps; que nous en voyons telle partie, non telle autre partie : on a donc dû concevoir, distinguer des *faces* diverses présentées par des corps ; et après avoir perçu l'intérieur d'un corps brisé, divisé, on a, par opposition à cet intérieur, à quelque face interne, conçu une face externe, une *surface*.

J'ai pensé que ces considérations, ces explications sur l'origine des conceptions dont il s'agit, ne seraient point sans intérêt, et seraient utiles pour la solution des questions importantes qui vont faire l'objet du chapitre suivant; mais l'auteur d'une géométrie peut se dispenser d'entrer dans des considérations de cette nature, qui rentrent dans les études purement philosophiques.

CHAPITRE II

DU FONDEMENT DES MATHÉMATIQUFS

La première question que comporte le sujet de ce chapitre est celle-ci : Ce qui fait l'objet des mathématiques est-il, peut-il être réel ?

Il est évident que les qualités abstraites que l'on y considère, telles que des surfaces, des lignes, des points, des durées, des mouvements, des forces, etc., ne sont pas des substances, des êtres réels.

Cependant, ai-je dit, s'il existe véritablement des corps, on peut dire qu'ils ont des surfaces, que leurs surfaces sont comme qualités des corps, comme points de vue ou rapports sous lesquels on peut envisager ces objets. De même, s'il existe des corps qui présentent quelque surface plane, ils offrent nécessairement des arêtes, des angles, conséquemment des lignes et des points mathématiques. On ne saurait se représenter ces lignes et ces points, mais on les conçoit abstraitement comme qualités.

Si des êtres réels durent, sont successivement, la durée est vraie aussi comme qualité, comme point de vue de l'être qui *dure*. S'il est des corps *se mouvant*, le mouvement est également vrai comme qualité. Si les corps sont *pesants*, s'ils *agissent* les uns sur les autres, la pesanteur et les forces physiques sont comme qualités des corps. Si les corps *résonnent* véritablement, les sons existent comme qualités ou effets produits.

Mais, d'abord, on a considéré que, parmi les qualités abstraites qui figurent en mathématiques, il en est qui n'appartiennent pas vraiment aux corps, tels qu'ils apparaissent : ainsi, dit-on, nous concevons abstraitement des surfaces parfaitement planes, des lignes absolument droites, des cercles parfaits, des angles absolument droits, des sphères parfaites, des carrés ou des cubes parfaits, une foule de figures absolument régulières, symétriques. Or, la nature ne nous offre vraiment rien de tel, rien de parfaitement régulier, rien d'absolument conforme aux objets de nos conceptions pures. A ce point de vue, l'on nie donc la réalité des objets de la science.

Que dit-on, pour montrer que, dans ce qu'on appelle les objets de la nature, ou les objets de nos perceptions, il n'en est aucun qui présente la régularité et la conformité dont il s'agit? — Rien de solide, ce me semble; car on ne saurait faire à cet égard une vérification complète, universelle, décisive, incontestable.

Mais ma philosophie tranche la question. J'ai publié un système où il est démontré que le monde extérieur n'existe pas ; que non-seulement l'étendue, mais encore la durée, ne sont pas des qualités réelles ; que rien ne change, ne se meut, n'agit ; qu'il ne peut y avoir que des êtres purement spirituels et sans durée. Dans l'impossibilité de développer ici ce système extraordinaire, mais basé sur es principes les plus rigoureux, les plus évidents, je renvoie le lecteur au livre qui en contient l'exposition complète [1].

D'après ce système, bien évidemment l'objet des mathématiques est sans réalité.

On peut, toutefois, dire que les mathématiques sont vraies *hypothétiquement ;* que si les qualités, l'étendue, les quantités, les grandeurs qui y figurent, étaient vraies, les théorèmes, les problèmes, les solutions qui constituent rationnellement les spéculations mathématiques seraient vrais aussi, étant des conséquences rigoureuses de ces données hypothétiques.

Admettons que les objets de nos sensations ou perceptions ne nous offrent aucune régularité, nulle

1. *Exposé d'un système philosophique*, déjà mentionné.

droite absolue, aucun cercle exact, etc.; on peut encore supposer que cette régularité nous a paru réelle, que nous avons considéré telle surface comme plane, telle arête comme droite, tel corps comme régulièrement rond, circulaire ou triangulaire à sa surface. Et ensuite, bien que nous ayons jugé que ces formes, ces dimensions, n'avaient pas la régularité que nous leur avions supposée, l'idée de cette régularité a bien pu nous rester, persister en nous. L'hypothèse de la nécessité d'une cause particulière, absolue, qui nous donne des notions de ce genre, serait donc encore gratuite.

Il en est de même à l'égard de nos conceptions de la surface, de la ligne et du point mathématiques qui ont été obtenus ainsi que je l'ai expliqué dans le chapitre précédent. On ne peut, à ce point de vue non plus, invoquer la nécessité d'une cause supérieure, en dehors de la nature, qui nous ait donné ces notions.

Pourtant, cette nécessité-là est généralement admise, professée.

En reconnaissant que les objets des spéculations mathématiques, ou du moins d'un grand nombre d'entre elles, ne sauraient avoir leur réalisation dans la nature; en considérant la variété, la contingence des phénomènes sensibles, de tout ce qui se produit ou apparaît dans le monde extérieur, on a jugé que les notions dites nécessaires, les principes absolus que nous avons, et notamment ces principes, ces notions, ces données, qui forment la base des mathématiques, ne pouvaient être puisés dans les sensations, dans les objets externes, mais devaient être causés en nous, soit directement, soit indirectement, par un être immuable, nécessaire, absolu, infini, par un *Dieu*, en un mot.

De là plusieurs doctrines : les uns ont admis des *idées innées*, comme des germes d'idées déposées par le Créateur dans les âmes, germes éclos plus tard sous l'influence des sensations.

D'autres, sans admettre positivement les idées innées, ont pensé que l'âme avait été douée par Dieu, leur créateur, d'une faculté particulière qui, excitée par les sensations, et même à l'aide des perceptions des objets imparfaits de la nature, concevait les notions nécessaires, absolues, les principes, les figures parfaites, etc.

D'autres, enfin, ont imaginé que nous percevons, que nous voyons tout cela directement et actuellement en Dieu.

Ces doctrines sont renversées par ma philosophie et par la raison, qui excluent la création, proclament que tout ce qui est réellement existe par soi-même, est nécessaire, immuable et sans durée. J'ai particulièrement réfuté ces mêmes doctrines dans le livre que je citais tout à l'heure. Tout se lie, tout s'enchaîne dans un système rationnel : je renvoie donc le lecteur à ce livre. Je ferai toutefois ici quelques réflexions au sujet de ces trois hypothèses impossibles.

Il est de toute évidence rationnelle qu'une idée ne peut exister en germe, comme on l'entend dans l'hypothèse des *idées innées :* il est visible qu'une idée n'est pas une réalité persistant *identiquement* dans le temps, et passant par divers états de développement. Il n'y a que des imaginations bien irréfléchies, ou des esprits bien faux, qui puissent s'arrêter à une semblable hypothèse.

Quant à la *vision en Dieu*, je dirai : Si l'on voit des notions en Dieu, elles sont en Dieu. Or, comment y sont-elles ? Des idées ou notions quelconques ne sont ni une substance, ni des qualités substantielles : certes, par exemple, il n'y a point en Dieu un être, une qualité réelle consistant en ce principe, que *le tout est plus grand que sa partie*, ou en cette vérité, que *deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.* — Il est de même évident que des notions ne sont pas en Dieu en tant que figurées, exprimées par des signes quelconques que nous percevons et qui nous donnent les mêmes notions. — Sont-elles en Dieu, en tant que Dieu pense, conçoive, ait lui-même des idées, des conceptions dans le sens où nous en avons nous-mêmes? Cette hypothèse est encore évidemment inadmissible : on ne saurait percevoir *réellement* un être en ce qu'il pense, conçoit, a une idée.

Enfin l'hypothèse plus généralement admise d'une faculté particulière par laquelle l'âme, après certaines perceptions, serait initiée aux vérités nécessaires, aux notions absolues, est contraire à l'unité, à l'indivisibilité de la substance de l'âme. L'âme est une, indivisible, elle n'a pas de facultés particulières. Ses manières de sentir, de penser, de concevoir, ne sont en réalité qu'un seul effet direct et immédiat de la substance pensante. Je ne puis qu'indiquer ces vérités; mais elles sont prouvées sous bien des points de vue dans l'exposé de mon *Système philosophique*.

Bien que nous ne puissions fonder sur aucune perception réelle les principes, les données absolues, il y a cependant une science philosophique et une science mathématique, en ce sens que nous avons l'intuition rationnelle des vérités qui en sont les bases, et des conséquences que nous en déduisons.

Pour admettre, pour croire fermement que deux et deux font quatre; que, s'il y avait un tout et une partie, le tout serait plus grand que la partie; que, s'il y avait des lignes et des distances, il ne pourrait y avoir qu'une ligne droite d'un point à un autre; pour admettre, en un mot, une vérité rationnelle quelconque, je n'ai point besoin de dire, avec M. Cousin, que la raison me vient *d'en haut*, que ma raison ne m'est pas *personnelle;* d'admettre un flambeau unique, un foyer de lumière qui éclaire à la fois toutes les intelligences : je vois là des métaphores, je n'y vois point la vérité.

La discussion qui précède répond à cette question, citée plus haut, de M. Destutt-Tracy :« Pour« quoi avons-nous des idées abstraites? » — Nous les avons, parce que la substance de l'âme (substance inconnue, mais indivisible, sans durée) est telle qu'il en résulte nécessairement et directement tous les sentiments, toutes les idées que nous avons. Il n'y a pas d'autres raisons à donner, mais celle-ci est rationnellement suffisante. Nous ne connaissons pas l'esprit; aucune substance sentante et pensante ne nous est connue : comment verrions-nous pourquoi une telle substance a telle ou telle idée, pourquoi elle sent ou pense d'une manière quelconque ?

La science des mathématiques étant raisonnée, doit reposer sur des vérités premières, sur des principes : quelle est, quelle doit être la nature de ces principes?

Bien généralement les mathématiciens, anciens et modernes, ont fondé leurs raisonnements, leurs démonstrations sur des axiomes rationnels, sur des principes qu'ils regardaient comme étant évidents par eux-mêmes aux yeux de la raison.

On peut donc s'étonner qu'il se soit élevé contre les axiomes mathématiques, en général, des protestations émanées de mathématiciens recommandables, imposants par le savoir.

Parmi ces protestations se distingue une doctrine qui a du retentissement en Angleterre, celle de M. Thompson; doctrine qui fait école dans ce pays, et que son auteur a produite dans un livre intitulé : *Géométrie sans axiomes.*

M. Thompson y professe que *rien n'est évident par soi-même, excepté peut-être une proposition identique.*

Suivant lui, *il y a des vérités dont l'évidence affecte continuellement nos sens; mais celles-ci ne sont pas évidentes par elles-mêmes; elles sont prouvées par le constant témoignage de nos sens. Il est donc d'un mauvais exemple de supposer la science fondée sur des axiomes.*

Aux définitions M. Thompson substitue la *nomenclature*, comme étant, dit-il, plus rigoureusement d'accord avec ce principe de Lavoisier, de *ne procéder jamais que du connu à l'inconnu.*

Entre autres définitions, l'auteur présente celles-ci :

« 10. Les points qui ne coïncident pas sont dits « être *distants* l'un de l'autre.

« 11. Deux points A et B sont *équidistants* avec « deux autres points C et D, ou sont à une *distance* « *égale* à celle de C à D, quand A et C étant appli-« qués l'un sur l'autre, B et D pourraient aussi être « appliqués l'un sur l'autre en même temps.

« 12. Deux ou plusieurs points tels que B, C, D... « *sont équidistants* d'un autre point A, quand B et « A, C et A, D et A, sont équidistants deux à deux « avec le couple précédent.

. . . .

« 14. Les grandeurs *égales* sont celles dont les li-« mites étant superposées, coïncident parfaitement, « ou peuvent être amenées à coïncider, par un ar-« rangement différent de leurs parties. »

L'auteur applique d'abord sa théorie à la démonstration de cette proposition : *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles;* proposition qui, pourtant, est évidente par elle-même.

Voici le raisonnement de M. Thompson :

« Soient A et B (fig. 6) deux grandeurs respective-« ment égales à C : elles seront égales entre elles.

« En effet, puisque A est égal à C (n° 14), les li-« mites de ces grandeurs pourront être superposées, « et A et C coïncideront, ou seront susceptibles de « coïncider par un arrangement différent de leurs

« parties. De même, puisque B est égal à C, ces « deux grandeurs coïncideront aussi. Or, chacune « des grandeurs A et B coïncide avec C; donc, si « leurs limites sont appliquées en même temps sur « celles de C, ces grandeurs coïncideront; donc, « elles sont égales. Il en serait de même si, au lieu « de deux grandeurs égales à C, il y en avait un « plus grand nombre.

« Par parité de raisonnement, on prouverait la « même chose dans tout autre exemple : donc uni- « versellement, les grandeurs égales à une même « grandeur sont égales entre elles. »

La doctrine de M. Thompson est insoutenable. Le témoignage des sens est une chimère. Les sens ne prouvent rien, ne rendent aucun témoignage. L'expérience même ne nous fournit pas les vérités mathématiques. De ce que, par exemple, nous aurions vu que, quand des grandeurs, mesurées et trouvées égales entre elles, ont été superposées, leurs limites ont constamment coïncidé, ou bien ont pu être amenées à coïncider par un certain arrangement de leurs parties, nous n'aurions pas ainsi la preuve, la certitude absolue que toujours l'égalité de grandeurs entraîne cette nécessité de coïncidence dans tous les cas analogues; de même l'expérience inverse ne prouverait pas vraiment, absolument, que la coïncidence de grandeurs par superposition entraîne l'égalité de ces grandeurs. Ce qui nous donne la certitude absolue, mathématique, est indépendant de l'expérience, qui, d'ailleurs, peut avoir été mal faite : on peut, en effet, se tromper dans ses observations, se tromper en mesurant des grandeurs, se tromper en jugeant que telles grandeurs superposées coïncident parfaitement. Mais quand même on serait sûr que toute erreur a été impossible, on ne pourrait pas, en vertu de l'expérience, étendre la certitude aux cas non expérimentés [1].

Et puis, si la proposition dont il s'agit était prouvée par ce qu'on appelle l'expérience, pourquoi n'en serait-il pas ainsi de cette proposition : *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles?* Est-ce que l'on ne saurait, en mesurant des grandeurs, reconnaître que telles grandeurs égales à telle même grandeur sont égales

1. La conception des axiomes mathématiques suppose certainement celle d'objets extérieurs généralisés sous certains rapports. Pour juger, par exemple, que le tout est plus grand que sa partie, il faut concevoir plusieurs touts et leurs parties, considérer sous ces rapports des objets étendus, corporels; mais enfin ce n'est point sur l'expérience qu'est fondée la croyance mathématique, que le tout est plus grand que sa partie, ou toute autre croyance de cet ordre.

Ce n'est pas non plus sur la probabilité. Laplace a eu tort de dire que toutes nos connaissances reposent sur la probabilité.

*

entre elles, tout comme on reconnaît que des grandeurs égales étant superposées, leurs limites coïncident ou peuvent coïncider au moyen de certain arrangement de leurs parties, ou comme on reconnaît la proposition inverse?

Il en serait de même des autres propositions que démontrent les géomètres. Ainsi, en mesurant les angles d'un triangle, on peut voir que leur somme égale deux angles droits. Dans un triangle rectangle, on peut voir de même que le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés opposés, après avoir mesuré ces trois carrés.

En un mot, si l'on adoptait le principe de l'expérience, la géométrie serait ou pourrait être ramenée à une science tout expérimentale, qui devrait suffire.

Non, non, on ne persuadera point les géomètres, les purs mathématiciens, que les mathématiques seraient plus solidement basées sur le témoignage des sens que sur la raison, que sur l'intuition rationnelle. On ne les déterminera point à transformer cette science de la raison en une science de l'expérience : ce serait en faire une science de routine. L'auteur ne va pas complétement jusque-là; ce sont seulement les principes qu'il veut prendre en dehors de la raison, seulement les principes qu'il demande au témoignage des sens; mais si la base croule, que devient l'édifice

La démonstration que j'ai rapportée plus haut a une sorte de rigueur apparente, mais c'est qu'en réalité l'auteur, sans se l'avouer, y fait figurer des axiomes rationnels sous des expressions équivoques. L'analyse de cette démonstration va nous montrer ces axiomes.

« Puisque A est égal à C, dit l'auteur, les limites « de ces grandeurs pourront être superposées, et A « et C coïncideront, ou seront susceptibles de coïnci- « der par un arrangement différent de leurs parties. » —Qu'est-ce donc que cette proposition, si elle n'est pas un axiome, une vérité rationnelle, évidente par elle-même? Encore une fois, les sens ne nous enseignent pas que si une grandeur A est égale à une grandeur C, ces grandeurs pourront être superposées et coïncider l'une avec l'autre. Non, c'est la raison qui nous l'affirme, et elle nous l'affirme indépendamment du témoignage des sens. Il est vrai que l'auteur a dit, dans sa nomenclature, « que les grandeurs égales sont celles dont les limites étant superposées coïncident parfaitement ou peuvent être amenées à coïncider par un arrangement de leurs parties; mais cette proposition cache elle-même un axiome rationnel déguisé sous la forme d'une simple dénomination. En effet, cette proposition, comme simple dénomination, n'est point juste; car l'idée d'égalité entre des grandeurs n'est point l'idée de superposition ni celle de coïncidence effectuées ou possibles entre ces grandeurs. Il n'est nullement besoin d'avoir ces dernières notions pour concevoir l'égalité de grandeurs, de dimensions, d'étendue quelconque. Ici donc la nomenclature recèle une proposition évidente en soi, admise par intuition, par une évidence rationnelle. Remarquons que, si une argumentation ne contenait pas d'axiomes, n'avait pour base que de simples dénominations, que des explications de termes employés, cette argumentation ne démontrerait rien, n'aurait aucune valeur. »

Poursuivons notre analyse : « De même, puis-« que B est égal à C, ces deux grandeurs coïncide-« ront aussi. » — Même observation à faire relativement à cette proposition qui est, je le soutiens, une vérité évidente par elle-même. — « Or, chacune des « grandeurs A et B coïncide avec C, donc si leurs « limites sont appliquées en même temps sur celles « de C, ces grandeurs coïncideront. » — C'est encore évident par soi-même, et sans interroger le témoignage des sens qui, je le répète, ne prouve rien. — « Donc elles sont égales. » — Vérité évidente par elle-même et non autrement.

L'auteur pose ensuite une foule de corollaires de ce premier théorème.

« Corollaire 1. Lorsque plusieurs grandeurs sont

« égales, si l'une d'elles est égale à une autre gran-
« deur, chacune des premières est pareillement
« égale à celle-ci. » — Cette proposition, qui est évidente en soi, il la démontre ainsi :

« Soient (fig. 6) A égal à B, et B égal à C, A
« sera aussi égal à C, car A est égal à B, et C est
« aussi égal à B : donc (d'après le théorème précé-
« dent) les grandeurs A et C sont égales. »

La proposition de ce corollaire est évidente en soi. Il est évident, en effet, que si A est égal à B et B à C, A est égal à C. L'auteur le démontre en disant que A est égal à B, et que C est aussi égal à B; et comment voit-il que C est égal à B? Il le voit en ce que B est égal à C : eh bien, cette vérité même, qui consiste à dire que quand une grandeur B est égale à une grandeur C, cette dernière grandeur est égale à la première; cette vérité, dis-je, est évidente par elle-même, elle est rationnelle, et les sens ne la prouvent pas non plus.

Tous les autres corollaires que présente l'auteur sont aussi des vérités évidentes par elles-mêmes, et l'auteur se met bien vainement en frais pour les prouver.

En voici quelques-uns :

« Lorsque plusieurs grandeurs sont égales, si
« l'une d'elles est plus grande ou plus petite qu'une
« autre grandeur, chacune des premières est pareil-

« lement plus grande ou plus petite que celle-ci, « *ou bien*, lorsqu'une grandeur est plus grande ou « plus petite que l'une de plusieurs grandeurs égales; « elle est aussi plus grande ou plus petite que cha-« cune de ces dernières.

« Les grandeurs égales à des grandeurs égales « sont égales entre elles.

« Lorsqu'à des grandeurs égales on ajoute des « grandeurs égales, les sommes sont égales. »

Qu'on analyse toutes les démonstrations qu'apporte l'auteur pour justifier ces propositions, et l'on reconnaîtra qu'il invoque, en réalité, des vérités qui sont évidentes par elles-mêmes, ou qu'il a démontrées précédemment au moyen de vérités de cet ordre.

Par exemple, on trouvera au corollaire 2 que « B étant plus grand que C, on peut retrancher de « B une grandeur telle que le reste soit égal à C. » — C'est incontestable, mais c'est évident en soi, rationnellement évident. — On y trouvera aussi que « A étant égal à B, A est aussi égal à C, plus « la grandeur qui manque à C pour valoir B. » — Vérité rationnelle, évidente par elle-même.

Au corollaire 5, je lis : « Car puisque A égale B, « la somme de A et C est égale à celle de B et C. » — Vérité que proclame l'intuition rationnelle.

La proposition II est celle-ci : *Un corps dur peut* *tourner autour d'un point, ou de deux points intérieurs, ce point ou ces points demeurant immobiles.*

Cela est évident en soi. L'auteur le démontre en invoquant des propositions aussi évidentes par elles-mêmes, telles que celle-ci, par exemple : *Un corps peut être placé dans une situation M, telle que le point B de ce corps occupe dans l'espace la même place que lorsque le corps était dans la situation A.*

La proposition III est un problème que l'auteur résout en invoquant de vrais axiomes rationnels, notamment celui que recèle le n° II de sa nomenclature, que j'ai cité plus haut.

Au corollaire 4 de cette proposition III, l'auteur dit que « les surfaces des sphères concentriques coïn« cident dans toutes leurs parties, ou ne coïncident « pas du tout : » ce qu'il prétend démontrer en alléguant que, « si elles coïncident en un point, elles « coïncident réellement dans tous les autres. » — Or, ces deux propositions sont évidentes par elles-mêmes. La sphère étant, d'après l'auteur lui-même, une figure dont tous les points de la surface sont équidistants d'un point intérieur, il est visible, sans démonstration, que les sphères ayant le même centre coïncident dans toutes les parties, en tous points, ou ne coïncident pas du tout; que, si elles coïncident en un point, elles coïncident dans tous les autres.

Les corollaires 5 et 6 de la même proposition III donneraient lieu à des observations analogues. Il est visible que l'auteur y emploie des axiomes rationnels.

Proposition IV de l'auteur : « Si une sphère « tourne de quelque manière que ce soit, autour de « son centre immobile, la sphère ne changera pas « de place. » — Quoi de plus évident, de plus rationnellement visible ? L'auteur croit cependant devoir le prouver, et comment? Au moyen de propositions qui ne sont encore que des vérités évidentes par elles-mêmes.

La proposition V est ainsi conçue : *Deux sphères qui se touchent extérieurement n'ont qu'un point de contact.* L'auteur a fait, de cette proposition, l'objet d'un théorème. Pour la démontrer, il se livre à une argumentation longue (elle a cinq pages), subtile, pénible. Or, cette même proposition est évidente par elle-même et peut faire l'objet d'un axiome rationnel.

Au reste, si je comprends son argumentation enchevêtrée, elle est vicieuse, et ne fournit pas la preuve qu'il poursuit. Elle est trop longue pour que je la reproduise.

Ce serait faire injure au lecteur que de croire utile de lui signaler tous les axiomes rationnels que l'auteur fait entrer dans ses preuves, en dépit de sa prétention de ne recourir à aucun principe de cette nature.

Ainsi l'auteur, sous prétexte de nomenclature, introduit subrepticement, pour ainsi dire, ces axiomes qu'il désavoue, et c'est même grâce à leur présence déguisée dans la nomenclature, et par suite dans les théorèmes ou problèmes qu'il discute, que ces théorèmes ou problèmes ont une apparence de solidité démonstrative. Mais, en réalité, ces démonstrations pèchent par leur base même, puisque, entendues comme les entend l'auteur, elle s'appuient sur des principes ou données que la raison ne peut reconnaître, qui mentent à l'esprit par une fausse interprétation de mots employés dans la nomenclature.

Il serait, d'ailleurs, difficile de justifier la préférence que l'auteur accorde à la nomenclature sur la définition. La définition, comme la nomenclature, ne comprend que des qualités connues ou qu'on croît connues. L'une et l'autre doivent et peuvent observer la règle qui consiste à aller du connu à l'inconnu. Il me paraît que cette préférence est une subtilité.

Au reste, qu'est-ce qui distingue, dans le fond et dans la forme, la nomenclature et une suite de définitions ? J'avoue que j'ai peine à saisir la différence, la nuance de ces deux modes. Il me paraît seulement que la définition suppose une détermination positive, complète de l'objet défini ; condition que n'implique pas aussi expressément la nomenclature.

Il est remarquable que les axiomes rationnels ont été en butte à des attaques fréquentes et énergiques.

La philosophie, une métaphysique sensualiste, empirique, leur a contesté toute valeur réelle. Contre ces principes on a posé ce dilemme : Ou bien ils n'expriment que des identités, ou ils émettent des propositions non identiques. Dans le premier cas, ils ne sauraient avoir aucune fécondité, nulle valeur. Que peuvent valoir, que peuvent donner à la science, par exemple, des affirmations de cette sorte : *Ce qui est est, ce qui est bon est bon ; le tout est le tout ; la partie est la partie ?* Que vaut ce principe : *Le tout est plus grand que sa partie,* s'il signifie seulement que *le tout est plus grand que ce qui est plus petit que lui ?* Et celui-ci : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre*[1], que vaut-il, s'il n'exprime que cette proposition : *La ligne droite est la ligne droite ?*

Si, au contraire, on prétend qu'un principe rationnel n'est pas seulement une proposition iden-

1. On verra que cette proposition ne vaut rien comme définition.

tique, qu'il n'affirme pas seulement *le même du même;* qu'il affirme une idée différente de celle dont elle est affirmée : oh! alors, dit-on, ce principe n'est pas légitime, il constitue une véritable usurpation, il ne peut servir de base, de prémisse au raisonnement.

Mais ces attaques ne sont nullement fondées. On les a victorieusement repoussées, et je renvoie le lecteur à la discussion que j'ai présentée à ce sujet dans l'exposé de mon système philosophique déjà cité, où j'ai montré, fait ressortir la légitimité, la force des axiomes rationnels.

Je me borne ici à proclamer que ces principes n'expriment point seulement des identités, mais des idées que la raison aperçoit au moyen d'idées vraiment différentes.

Mais qu'est-ce que la raison, diront les *empiriques?* Qu'est-ce que cette voix que vous mettez au-dessus du témoignage des sens et de l'expérience? Quels sont ses titres? Où prend-elle son droit à la prédominance intellectuelle, à l'autorité scientifique? Y a-t-il en nous, en vous, une faculté, une force particulière qui soit la raison? Si oui, à quel signe reconnaître qu'elle s'exerce, que l'erreur n'usurpe pas sa place dans nos jugements? Chacun prétend raisonner, et pourtant qui n'a pas trouvé de contradicteurs, même au sujet de quelque démonstration, de propositions émises au nom de cette souveraine que vous appelez raison?

Je l'avouerai tout d'abord, il n'est point de faculté particulière qui s'exerce en nous quand nous raisonnons. La raison n'est point un être, une substance, ni même une force, un agent particulier de notre âme, de notre esprit. Ma raison, votre raison, c'est moi, c'est vous raisonnant. La raison, c'est, en général, l'être raisonnant. Dans le but de donner une base inébranlable à la science, je ne saurais, avec certains philosophes plus ou moins mystiques, proclamer que la raison est divine, que nous la puisons en Dieu, que nous percevons en Dieu les principes absolus, les axiomes : j'ai combattu, ruiné ces ténébreuses doctrines, aussi fausses que poétiques. Malebranche était un poëte philosophe, non point un métaphysicien profond, et il en est ainsi de tous ceux qui ont mis les fictions de leur génie à la place de la simple et forte vérité, à la place de cette raison qu'ils personnifiaient, ou dont ils cherchaient la source, le siége, dans l'infini, dans l'absolu, c'est-à-dire dans un être rejeté par la raison elle-même.

La raison, ce n'est que l'individu considéré en tant qu'il raisonne, c'est-à-dire en tant qu'il sent ou pense de certaines manières, et tous les sentiments, toutes les pensées n'ont pour chacun qu'une source réelle, qu'une cause véritable, la substance de l'âme, qui est absolument une, sans action sur elle-même [1].

Quoi qu'il en soit, et quoi qu'on admette touchant cette haute question métaphysiqne, on m'accordera que la raison, considérée en nous, est la pensée reconnaissant une vérité, jugeant que telle proposition est vraie, certaine, nécessaire.

La raison se produit de deux manières principales, ou, si l'on veut, sous deux aspects divers : on voit la vérité, la certitude, la nécessité, par intuition directe, ou par déduction d'intuitions directes. C'est l'objet de la première manière, ou du premier aspect, que j'appelle *axiome rationnel*, *vérité nécessaire*. L'autre manière ou aspect constitue, à proprement parler, le raisonnement; elle fournit les démonstrations, les preuves rationnelles.

En résumé, on peut et par conséquent l'on doit fonder les mathématiques pures uniquement sur des axiomes ou principes rationnels.

Un principe ou axiome rationnel est une vérité que la raison aperçoit directement, sans vérité intermédiaire; une proposition qu'elle admet, qu'elle affirme sans aucune autre considération que celle de la proposition affirmée.

1. Voir l'*Exposé de mon système philosophique*.

Pour qu'une proposition puisse être présentée à titre d'axiome rationnel, il faut que l'esprit l'aperçoive nettement et sans mélange d'aucun doute. Si une proposition ne présente pas ce caractère à l'esprit, l'on ne doit l'affirmer absolument qu'en la démontrant au moyen d'axiomes rationnels.

Une vérité peut être rationnellement évidente par elle-même, bien que susceptible d'être démontrée, prouvée par le raisonnement, c'est-à-dire d'être fondée sur d'autres vérités rationnelles. Souvent aussi on a plusieurs démonstrations d'une même proposition. Quel parti prendre en ces cas? Faut-il se contenter de l'évidence, se borner à dire que telle vérité est évidente par elle-même? ou bien faut-il, de plus, présenter la démonstration qu'on obtient? — Faut-il présenter toutes les démonstrations qui s'offrent à l'esprit?

Sans poser, à cet égard, une règle absolue, je dirai qu'en général il ne faut négliger aucun moyen donné pour établir solidement une vérité; qu'ainsi il est bon d'employer, dans la première hypothèse, les deux voies, les deux modes offerts à la raison : celle de l'évidence directe, et celle de la démonstration. J'y vois, entre autres avantages, celui de montrer la liaison, l'accord qui existe entre les diverses spéculations rationnelles : accord qui est imposant. Il y a toutefois une mesure à garder : s'il s'agit d'une proposition peu importante, et qui soit, pour tous, fort évidente par elle-même, on peut négliger la démonstration qu'on pourrait en donner, surtout si cette démonstration devait reposer sur quelque axiome qui ne paraîtrait pas devoir être aussi évident à tous les esprits que ne l'est la vérité même dont il s'agit.

Quant aux démonstrations, si l'on en a plusieurs, deux, trois, quatre, etc., il est bon, en général, de présenter la plus simple, la plus facile à saisir parmi celles qui sont fondées sur les axiomes les plus susceptibles d'être reconnus par tout le monde.

Peut-il y avoir du plus ou du moins dans l'évidence d'une proposition, dans la solidité, la rigueur d'une démonstration? L'on n'hésitera pas, je pense, à résoudre négativement cette question; on dira que, de deux choses l'une, ou l'on doute, ou l'on ne doute pas; que, pour peu qu'on doute d'une proposition, on ne peut la présenter comme axiome, et pour peu qu'on doute d'une conséquence d'axiomes, on ne doit point affirmer cette conséquence.

Je répondrai que, sans précisément douter d'une proposition, ou d'une conséquence, il y a des propositions ou des déductions qui nous frappent davantage, qui saisissent plus vivement l'esprit; et ce sont ces dernières qu'il faut préférer. D'ailleurs, le mathématicien ne spécule pas pour lui seul; telle proposition qui lui paraît évidente, pourrait ne pas paraître telle à tous, à la généralité des esprits ; il peut le penser, et il doit s'attacher surtout à émettre ce qui lui semble le plus susceptible de porter la conviction dans tous les hommes qui s'occupent de la science, afin de la répandre, de la vulgariser autant que possible.

Maintenant, quels sont les principes, les vérités qui, d'après les règles que je viens de poser, doivent être présentés comme axiomes ou vérités évidentes par elles-mêmes? Les axiomes qu'on a admis sont-ils bien rationnels, vraiment admissibles? Tels sont les points que je vais examiner.

CHAPITRE III

DES PRINCIPES PREMIERS OU AXIOMES RATIONNELS DES MATHÉMATIQUES

Ces principes ou axiomes se rapportent à l'arithmétique, ou à la géométrie, ou à l'algèbre.

§ 1er

Des axiomes de l'Arithmétique.

L'arithmétique a ses axiomes, ses principes rationnels, évidents par eux-mêmes.

On peut classer dans cette catégorie cette proposition : *deux et deux font quatre;* car on peut voir immédiatement la vérité de cette proposition, en ayant les idées de *deux et deux* et de *quatre.* Il peut en être ainsi d'autres propositions de ce genre, telles que *deux et un font trois,* ou *deux et trois font cinq; quatre moins deux égalent deux; deux est contenu deux fois dans quatre.*

J'énoncerai des propositions qui me seront évidentes par elles-mêmes, en disant que, *si une aune de drap a coûté* 20 *francs, sept aunes doivent coûter sept fois* 20 *francs;* que, *si j'ai payé* 20 *francs sur* 140 *francs que je devais, je saurai ce* *que je dois en retranchant* 20 *francs de* 240 *francs*.

On peut aussi considérer comme des axiomes arithmétiques, que *deux nombres dont chacun est égal à un troisième sont égaux entre eux;* que *deux nombres égaux, diminués chacun d'un même nombre, sont encore égaux après cette diminution;* que *deux nombres égaux, augmentés chacun d'un même nombre, sont encore égaux après cette augmentation;* que, *si deux nombres égaux sont multipliés chacun par un même nombre, les deux produits seront égaux;* que *si, de deux nombres, l'un est le double de l'autre, ils seront encore dans la même proportion, s'ils sont multipliés par un même nombre.*

Je crois inutile d'énumérer tous les axiomes de l'arithmétique : ils se trouvent, explicitement ou implicitement, dans les traités concernant cette branche des mathématiques, et on les reconnaîtra facilement avec un peu de réflexion et en ne perdant pas de vue qu'ils doivent être des propositions évidentes par elles-mêmes.

§ 2

Des axiomes géométriques.

Je n'hésite point à admettre comme axiomes rationnels ceux que Legendre a présentés dans sa géométrie, et qui l'ont été aussi par beaucoup d'autres géomètres. Les voici :

1° *Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.*

2° *Le tout est plus grand que sa partie.*

3° *Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé.*

4° *D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite.*

5° *Deux grandeurs, ligne, surface ou solide, sont égales lorsque, étant placées l'une sur l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue.*

J'accepte aussi, au nom de la raison, de l'évidence rationnelle, comme visibles par elles-mêmes, les propositions présentées par Euclide, dans ses *Éléments*, sous le titre de *Notions communes,* parmi lesquelles se retrouvent, du moins en substance, plusieurs des axiomes de Legendre.

Voici les notions ou axiomes d'Euclide :

1° *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.*

2° *Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.*

3° *Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.*

4° *Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs inégales, les touts seront inégaux.*

5° *Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.*

6° *Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles.*

7° *Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles.*

8° *Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles.*

9° *Le tout est plus grand que sa partie.*

Indépendamment de ces notions communes, on trouve dans cet ouvrage d'Euclide, sous le titre de demande, cette proposition : *Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

Je ne regarde point cette proposition-là comme évidente par elle-même. La raison n'aperçoit pas cette vérité d'une manière directe : il y a ici des *raisons*, des *motifs*, des *parce que*, qui autorisent à l'affirmer. Il y a une sorte de démonstration tacite.

Lacroix, dans ses *Éléments*, admet un *postulatum* qui apporte une grande modification à celui dont je viens de parler. A la place de la proposition d'Euclide, il substitue celle-ci : *Une droite qui est perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre; et il n'y a* *par conséquent, sur un plan, que les droites perpendiculaires à une même ligne qui ne se rencontrent pas, ou qui soient parallèles entre elles.* Je montrerai ultérieurement, en traitant des parallèles, que cette demande n'est pas un axiome, une vérité évidente par elle-même.

Il est une foule de propositions que les géomètres ont démontrées et qui cependant sont évidentes par elles-mêmes. Dans ce nombre, je citerai les propositions suivantes, qu'on pourrait regarder comme des axiomes rationnels :

Les angles opposés par le sommet, que forment deux droites en se coupant, sont égaux.

On ne peut renfermer un espace par un nombre de droites moindre que trois; ou bien l'on ne peut renfermer un espace par deux droites.

La somme de deux côtés quelconques de tout triangle surpasse le troisième côté.

Lorsque deux droites sont parallèles, en ce sens qu'elles sont à égale distance l'une de l'autre dans toute leur étendue, toutes les droites qui sont perpendiculaires sur l'une le sont aussi sur l'autre.

Si deux lignes doites sont perpendiculaires à une troisième, ces deux lignes sont parallèles.

Deux droites parallèles à une troisième sont aussi parallèles entre elles.

Lorsque deux droites parallèles entre elles sont *coupées par une droite quelconque, les angles qu'elles font avec cette dernière, d'un même côté, l'un en dedans, l'autre en dehors, sont égaux entre eux.*

Une droite et un cercle ne peuvent se couper en plus de deux points.

Il est encore bien d'autres propositions évidentes par elles-mêmes qui ont été démontrées.

Il est certaines vérités évidentes par elles-mêmes qui ont été violées.

Ainsi la raison voit directement, dans l'étendue même, que toute étendue, quelque minime qu'elle soit, est divisible par la pensée.

Elle voit qu'une ligne ne peut être un composé, ou ensemble d'éléments inétendus, indivisibles, de points mathématiques ;

Qu'une surface ne peut être formée d'une suite de lignes mathématiques, de lignes sans largeur unies entre elles;

Qu'un solide ne saurait être un composé de surfaces superposées, appliquées les unes sur les autres.

Ces évidences ou intuitions rationnelles n'ont pas été toujours respectées par la spéculation.

Ces trois dernières peuvent être confirmées par une démonstration, par un dilemme dont les deux branches aboutissent à l'absurde.

En effet, si l'on soutenait qu'une ligne finie est composée d'une série de points inétendus, mathématiques, ou bien le nombre de ces points élémentaires serait infini, ou bien il serait fini, limité. Il est absurde de supposer ce nombre limité, fini, car, dans cette hypothèse, l'étendue de la ligne finie considérée n'offrirait pas assez d'espace pour contenir un nombre de points plus grands que celui qu'elle contiendrait réellement, supposition bien évidemment inadmissible, puisqu'il s'agit de points sans étendue, dont chacun n'occupe aucun espace. Veut-on maintenant que le nombre de points inétendus contenus par une ligne finie quelconque soit infini? Il s'ensuivra que toutes les lignes finies seront d'égale longueur, ce qui est absurde.

La même argumentation s'appliquerait aux surfaces et aux solides, pour démontrer l'absurdité qu'il y aurait à les supposer formés de lignes mathématiques ou de surfaces, unies ou superposées les unes aux autres.

Je proclame aussi, comme vérité évidente par elle-même, que la circonférence d'un cercle, qu'une courbe quelconque ne peut être en contact avec une droite qu'en un point mathématique, un point sans étendue. Il en est de même entre les courbes de courbures différentes. Cela est d'ailleurs vrai pour les surfaces comme pour les lignes. Il n'y a que deux lignes droites, ou deux plans, deux lignes courbes ou deux surfaces courbes de même courbure, qui puissent se trouver en contact dans leur étendue ou dans une portion quelconque de leur étendue.

Pareillement le sommet d'un angle, étant un point mathématique, ne peut être en contact avec une ligne ou surface qu'en un point mathématique de cette ligne ou surface.

Ce contact mathématique des corps que l'on conçoit entre des points sans étendue, n'est pas ce contact réel que nous supposons entre des corps qui paraissent agir les uns sur les autres, se choquer, s'arrêter ou se mettre en mouvement par suite d'un choc. Ces phénomènes physiques, en effet, impliqueraient qu'une certaine étendue, une partie réelle quelconque de la surface de l'un et de l'autre des corps qui y participent, est en contact matériel.

Il est évident, sans démonstration, que l'infini est impossible. La raison proclame, par intuition directe, qu'il n'est point d'infiniment grand, d'étendue ou quantité infinie. Il n'est pas besoin d'une démonstration de cette vérité. Je m'adresse à la raison du lecteur, et je lui demande si elle peut admettre une quantité infinie, un nombre infini, un être ayant une étendue réelle et sans fin. Non, répondra-t-elle aussitôt. Il ne s'agit pas ici d'opposer les bornes de notre intelligence, de notre raison. Vainement on dirait qu'à la vérité nous ne saurions nous représenter l'infini, une étendue ou quantité infinie, mais qu'on la conçoit néanmoins comme possible. Non, non, répondrais-je, non-seulement vous ne vous représentez point l'infini, une étendue ou quantité sans fin, mais votre raison, la mienne, du moins, proteste contre la réalité possible d'une telle étendue, d'une telle quantité.

Au reste, non-seulement la raison voit directement que l'infini est impossible, elle le voit aussi par voie de conséquence, elle le prouve par la réduction à l'absurde.

Supposez, en effet, un nombre infini d'objets : vous en ôterez, par la pensée, autant d'objets que vous voudrez, et le nombre sera encore infini ; c'est-à-dire qu'il n'aura pas changé, ne sera pas moindre qu'il n'était, bien qne vous ayez ôté un nombre quelconque fini des unités qui le composaient : conséquence absurde.

Supposez un espace infini, ou une durée infinie : vous en retrancherez autant d'espace ou de temps finis que vous voudrez, sans diminuer cet espace ou cette durée : conséquence absurde.

Supposez un espace infini, un plan, par exemple, infini dans tous les sens ou seulement dans un sens. Supposez que cet espace soit divisé par moitié, ou en d'autres portions par une ou plusieurs lignes infinies tirées dans le sens de son infinité : chaque moitié, chaque portion résultant de la division sera infinie en étendue ; par conséquent, elles seront toutes égales entre elles, et chacune sera égale au tout : l'axiome : *le tout est plus grand que sa partie*, sera violé : conséquemment absurde.

Dira-t-on que nous concevons l'espace, cet espace où se meuvent les corps célestes, comme infini, et ne saurions le borner ; que, puisque je suppose l'étendue, en géométrie, bien que je nie la réalité de l'étendue, je puis de même, dans cette science, supposer une étendue infinie, bien que je nie la possibilité de l'infini ?

Je répondrais que, la géométrie étant relative à l'étendue, s'exerçant seulement sur l'étendue, il faut bien, en géométrie, supposer l'étendue, en ne considérant cette science que comme purement hypothétique ; mais, en admettant cette hypothèse contraire à la réalité, il faut, du moins, ne prendre de l'étendue que ce qui n'implique pas contradiction. Or, on vient de le voir, l'hypothèse de l'infinité d'étendue mène à la contradiction, à l'absurde, à la violation d'un principe que la raison proclame dans la supposition de l'étendue : rejetons donc cette hypothèse. En raisonnant sur une chose chimérique, comme l'étendue, prenons-la en ce qu'elle peut s'accorder avec la raison, à part les considérations purement métaphysiques qui prouvent sa non-réalité. *Rationalisons* autant que possible l'hypothèse de cette entité chimérique, et puisque, étant supposée l'étendue, la raison voit, directement et par la réduction à l'absurde, que l'étendue ne saurait être infinie, rejetons son infinité, et ne considérons que des étendues finies.

Ces raisons s'appliqueraient, en partie du moins, à la durée, à tout ce qui se compte, se mesure, se pèse.

L'infiniment petit est énergiquement rejeté par la raison. Non-seulement elle en voit l'impossibilité par l'intuition directe ; non-seulement elle sent de prime abord qu'il ne peut pas y avoir un dernier degré de petitesse ; mais elle se démontre cette impossibilité, elle la déduit de la divisibilité essentielle à toute étendue, à une partie quelconque. Si en effet, un objet a une étendue, une quantité quelconque, si petite qu'elle soit, on peut diviser cette étendue ou quantité, puis diviser les parties obtenues par la division, subdiviser encore, et ainsi de suite, sans qu'il soit possible d'arriver à une étendue ou quantité indivisible. On peut aisément se rendre compte de cette divisibilité sans fin, par une fraction qu'on rendrait de plus en plus petite par la seule multiplication de son dénominateur. Soit, par exemple, la fraction $\frac{1}{2}$. Il est évident que vous pourrez multiplier le dénominateur par un nombre quelconque, par 2, je suppose; puis multiplier le produit 4 de la première multiplication par 2, puis le produit 8 par 2, et ainsi de suite, sans pouvoir assigner un terme à ce doublement du dénominateur, et par conséquent à la subdivision de la fraction $\frac{1}{2}$, à la petitesse possible de la fraction obtenue par cette subdivision.

L'infiniment grand et l'infiniment petit sont repoussés par la raison; mais il y a cette différence entre eux, que l'impossibilité du premier n'est pas aperçue au point de vue de la nature même de l'étendue, tandis que cette nature révèle l'impossibilité de l'infiniment petit; car l'étendue est essentiellement divisible, et cette divisibilité exclut l'hypothèse d'un dernier degré de ténuité, d'une petitesse qui ne permette pas d'en supposer une au-dessous de celle-ci.

La plupart des mathématiciens ont admis l'infini, ont raisonné dans l'hypothèse de quantités infinies, de grandeurs sans limites. Je m'occuperai particulièrement de ces spéculations, qui ne peuvent être acceptées par la théorie. Je montrerai que la science peut se développer suffisamment sans recourir à cette hypothèse irrationnelle.

L'infiniment petit, les parties indivisibles, les éléments sans étendue, ont, surtout dans les temps modernes, pris une très-grande place dans les travaux des mathématiciens, des géomètres. La théorie devra aussi être purgée de ces conceptions contraires à la raison. Un jour le progrès de la raison les fera écarter de la spéculation : on pourra en user pour la pratique, si elles facilitent les calculs, mais en proclamant qu'on ne les emploie qu'à ce point de vue.

J'arrive à un principe bien important, à une vérité évidente par elle-même, dont l'application devra avoir pour effet de faire supprimer une fort grande partie des mathématiques, telles qu'elles sont professées maintenant. Ce principe, c'est le principe d'homogénéité, principe dont on aperçoit quelques lueurs dans les œuvres des mathématiciens, mais qui a été bien souvent violé, même par les plus célèbres d'entre eux.

Le principe d'homogénéité, du moins ce que j'appelle ainsi, consiste en ce que des grandeurs, des quantités homogènes, de même nature, peuvent seules avoir entre elles des rapports de degrés ou de quantités : il ne saurait, en d'autres termes, y avoir aucun rapport réel de quantité, entre deux grandeurs hétérogènes, entre des étendues essentiellement différentes.

Il y a, par exemple, une différence essentielle entre une ligne courbe et une ligne droite, et entre des courbes de diverses courbures. Eh bien, ces différences essentielles ne permettent pas d'admettre rationnellement un rapport de quantité entre une ligne courbe et une ligne droite, ni entre des lignes courbes de courbures diverses. La raison ne peut supposer que ces lignes s'égalent en longueur, ou que leurs longueurs sont, entre elles, en une certaine proportion géométrique ou arithmétique.

De même, et par la même raison, deux surfaces planes, mais terminées l'une par quelque ligne courbe, et l'autre par des lignes droites, ou toutes les deux terminées par des lignes courbes, mais par des lignes courbes de diverses courbures, ne peuvent avoir entre elles aucun rapport de quantité.

Il faut en dire autant d'une surface courbe et d'une surface plane, ou de surfaces courbes de différentes courbures : point de rapport de quantité admissible entre ces grandeurs essentiellement différentes.

La même impossibilité d'un rapport de quantité existe entre deux solides dont l'un est terminé par une surface courbe et l'autre par une surface plane, ou qui sont compris tous les deux sous des surfaces courbes, mais différentes par leur courbure même. Il suffit qu'un corps offre une courbure que ne présente pas un autre corps, pour que nul rapport de quantité n'existe entre eux.

En émettant un principe qui, entendu comme je l'entends, devra renverser tant de théories admises et admirées, je m'attends à des objections nombreuses.

Voici, je pense, les plus fortes qu'on pourrait élever.

Première objection. On m'opposera l'expérience. On dira que nous avons la certitude que des corps, des substances présentaient d'abord une surface courbe, qui ensuite est devenue plane. Qui ne sait, qui ne comprend, ajoutera-t-on, que, dans les objets de nos perceptions, il s'opère, il peut se produire des transformations de courbes en droites, et de droites en courbes? Est-ce que ce fil, par exemple, ce cheveu, si flexibles, ne peuvent pas prendre toutes les directions, passer par toutes les courbures, décrire tantôt une ligne droite, tantôt une courbe quelconque, tout en conservant la même longueur ? Si deux objets de cette sorte sont d'abord en ligne droite l'un et l'autre, et que l'un d'eux se courbe, est-ce que le rapport de quantité qui existait entre eux lorsqu'ils étaient tous les deux en ligne droite, ne se continuera plus après que l'un se sera courbé? Certes, ce rapport existera encore; telle courbe réellement rectifiée a la même étendue, étant droite, qu'elle avait, étant courbe : donc, une courbe et une droite peuvent bien s'égaler en étendue, en longueur, ou avoir entre elles tel autre rapport de quantité; et il en est de même des courbes de différentes courbures : l'expériencenous montre également qu'elles peuvent s'égaler en longueur, en quantité.

A cette objection, je réponds que l'on ne saurait légitimement opposer l'expérience à la raison proclamant l'impossibilité des rapports dont il s'agit. Je pourrais me borner à dire, pour renverser l'objection, que rien ne prouve la réalité des transformations qu'on oppose, ni même la réalité des corps, de la matière[1]. — En supposant la réalité du monde physique, on peut supposer aussi que jamais il n'y a véritablement des courbes changées en droites, ou réciproquement, ni des courbes modifiées dans leur courbure par une flexion de leurs parties : cette supposition serait d'autant plus admissible, qu'on professe, en physique, que les corps sont formés de molécules élémentaires distantes, très-distantes les unes des autres.

Admettons, d'ailleurs, qu'il n'en soit pas ainsi, qu'il y ait réellement des corps offrant des continuités d'étendues courbes ou planes : la raison va

1. J'ai prouvé l'idéalité des corps dans l'*Exposé de mon système philosophique*.

nous montrer que, dans cette hypothèse encore, la transformation de courbes en droites, et de droites en courbes, serait impossible.

Supposons, en effet, un corps circulaire, une certaine étendue réelle présentant une courbure quelconque, soit dans sa totalité, soit dans une de ses parties : pour qu'il y ait mouvement à la surface supposée courbe, il faudra qu'il y ait une certaine quantité de matière, si petite qu'elle soit, qui se meuve à la fois, qui affecte telle ou telle direction, ait un même mouvement, et chaque parcelle ayant ce même mouvement conservera sa figure, par conséquent sa courbure. Ces parties déplacées ne sauront donc jamais, par leur réunion, former une surface plane du côté de la courbure qui leur est inhérente. Je conçois qu'elles pourront se disposer entre elles de manière à former un feston de petites surfaces courbes unies entre elles, du côté de cette même surface courbe qu'elles formaient d'abord, et une sorte de dentelure, une solution de continuité du côté opposé ; mais ni d'un côté ni de l'autre, il n'y aura conversion d'une surface courbe en surface plane, ou réciproquement.

L'impossibilité de transformation d'une courbe en droite, et réciproquement, opérée par le mouvement, existerait encore rationnellement, alors même qu'il ne s'agirait que d'un mouvement conçu entre des parties de lignes ou surfaces mathématiques, c'est-à-dire supposées existantes abstraction faite de tout corps, de toutes substances matérielles ; car, pour ces grandeurs abstraites comme pour les grandeurs réelles, corporelles, on ne pourrait raisonnablement admettre un mouvement de leurs parties, sans admettre aussi que ces parties, si petites qu'on les supposât, conservent leur figure, leur courbure, si la ligne ou surface est courbe. À part donc la réalité des corps, la raison repousserait la transformation des courbes en droites, et des droites en courbes.

Seconde objection. On me dira peut-être : L'expérience nous montre, et en dehors de l'expérience nous concevons que deux points peuvent se mouvoir avec une égale vitesse et en décrivant, l'un une ligne courbe, l'autre une ligne droite. Les lignes qu'ils décrivent dans un temps égal doivent donc être égales entre elles, et puisque l'une est courbe et l'autre droite, il est ainsi évident qu'une ligne courbe peut égaler en longueur une ligne droite, qu'il peut y avoir entre elles un rapport de quantité.

Cette objection serait sans force contre la raison. Il y a plus, elle ne serait qu'un cercle vicieux, ou plutôt une pétition de principe. En effet, elle suppose que les points mobiles ont une égale vitesse en décrivant l'un une ligne courbe, l'autre une ligne droite. Or, la vitesse se mesure en raison de l'espace parcouru pendant l'unité de temps. Ainsi, pour admettre qu'un point se meut en ligne courbe avec une vitesse égale à celle d'un autre point se mouvant en ligne droite, il faudrait qu'on pût considérer, dans la ligne courbe, des espaces égaux à ceux considérés dans la ligne droite. Or, c'est précisément cette possibilité que je nie et repousse au nom de la raison. L'objection serait donc fondée sur l'hypothèse même qui fait l'objet de la discussion.

Il est d'ailleurs visible qu'on ne peut non plus, sous ce rapport, m'opposer l'expérience, puisque je conteste le fait même de l'égalité possible d'espaces, et, par conséquent, de vitesses en ligne courbe et en ligne droite. On ne saurait jamais opposer l'expérience à la raison. La raison est absolue. Rien ne prouve que les faits soient tels qu'ils nous apparaissent[1]. En supposant des mouvements réels, voyons-nous bien que les uns s'effectuent réellement en ligne droite, les autres réellement en ligne courbe? Ne peut-on supposer que tel mouvement qui nous semble effectué en ligne courbe, décrit en réalité une ligne brisée ? Certes, on le peut.

De plus, je montrerai que le mouvement curviligne est inadmissible, irrationnel.

1. Voir mon *Système philosophique*.

La raison repousserait toutes les objections qu'on pourrait soulever pour défendre la doctrine qui suppose des rapports de quantité entre des courbes et des droites, et entre des courbes différentes.

Une ligne courbe et une ligne droite ne sont pas seulement *incommensurables* entre elles ; elles sont essentiellement différentes, et c'est à ce point de vue qu'elles ne peuvent s'égaler, avoir entre elles un rapport réel de quantité. — On conçoit des lignes droites incommensurables entre elles : telles sont, par exemple, le côté du carré et la diagonale du même carré, et cependant ces lignes ne sont point essentiellement différentes entre elles : on peut prendre, dans l'une, *en un lieu quelconque*, une partie qui soit commensurable avec l'autre. Le rectangle compris par deux droites incommensurables pourra égaler un carré. On obtiendra le côté de ce carré en prenant une moyenne proportionnelle entre les deux droites incommensurables. Mais un cercle, que, sans fondements, on suppose égal à un rectangle compris par la circonférence rectifiée et la moitié du rayon, ne saurait égaler un rectangle quelconque. Si un cercle pouvait égaler un rectangle, il pourrait, par une certaine disposition de ses parties, prendre la figure de ce rectangle, coïncider avec ce rectangle, s'il lui était superposé après cette transformation. Or, cela est évidemment impossible ;

jamais un cercle, par aucun procédé, ne pourrait disposer ses parties de manière à devenir un carré, un rectangle, une figure comprise seulement entre des lignes droites. Il resterait toujours de petits segments, de petites parties terminées, d'un côté, par une courbe, qui ne prendraient pas place dans une figure rectiligne. Cela est si évident pour ma raison, que je m'étonne que les géomètres aient pu supposer un rapport de quantité entre des courbes et des droites, entre un cercle et un carré. Pourtant, ils ont admis une telle impossibilité. Ils ont, il est vrai, reconnu, en général, qu'ils ne pouvaient déterminer géométriquement, exactement le carré répondant au cercle, le rapport de la circonférence au diamètre; mais enfin ils ont affirmé ces rapports. Ils ont professé que l'aire du cercle est égale à la moitié du produit de la circonférence multipliée par le rayon; ils ont, de plus, prétendu démontrer que la surface de la sphère est égale au produit de son grand cercle multiplié par le diamètre; que la solidité de la sphère égale le produit de sa surface par le tiers du rayon. Ils ont cru, d'ailleurs, avoir obtenu exactement la longueur d'autres courbes, l'aire d'autres surfaces courbes ou curvilignes[1], le volume de solides offrant d'autres surfaces courbes.

1. Par surface *curviligne*, j'entends une surface courbe ou plane terminée par une ou plusieurs lignes courbes.

Et toutes ces spéculations croulent devant les principes rationnels que je viens d'établir.

Beaucoup d'entre eux n'ont point désespéré qu'on pût parvenir un jour à la solution de la quadrature du cercle. Legendre lui-même, l'un de nos géomètres modernes les plus distingués, paraît en concevoir la possibilité. « *Jusqu'à présent*, dit-il (dans « ses *Éléments de Géométrie*), on n'a pu détermi- « ner ce rapport (celui de la circonférence au « diamètre) que d'une manière approchée; mais « l'approximation a été poussée si loin que la con- « naissance du rapport exact n'aurait aucun avan- « tage réel sur celle du rapport approché. »

Les géomètres ont affirmé et prétendu démontrer que les cercles sont entre eux comme leurs diamètres ou comme leurs rayons, et pourtant cette proportionnalité est impossible entre des cercles différents par leur courbure même. Ils ont admis une infinité de rapports impossibles entre des courbes différentes, entre des courbes et des droites.

Nous verrons que leurs prétendues démonstrations ne démontrent vraiment point ce qu'ils veulent prouver; qu'elles reposent sur des données fausses, des suppositions expresses ou tacites que la raison ne reconnaît point.

M'objectera-t-on que, telle figure rectiligne ou à surface plane peut être contenue dans telle figure curviligne ou à surface courbe, et que par conséquent elles ne sont pas hétérogènes sous le rapport de leur étendue, comme je le soutiens? — Je répondrais que c'est dans leur totalité qu'il faut les considérer pour voir leur hétérogénéité de quantité. On peut retrancher sur un cercle, par exemple, telle surface rectiligne; mais il restera toujours des segments curvilignes, des parties plus ou moins étendues qui ne sauraient égaler en quantité une étendue rectiligne quelconque. C'est à ce point de vue qu'il y a hétérogénéité de quantité entre des surfaces curvilignes et des surfaces rectilignes, et entre des surfaces terminées par des courbes essentiellement différentes. Et il en est ainsi quant aux solides.

Puisqu'il n'y a point de rapport mathématique de quantité entre une ligne courbe et une ligne droite, ni entre des courbes différentes, on ne doit pas, dans la langue rationnelle, dire que telle ligne courbe est plus longue, ou est moins longue que telle droite, ou que telle courbe différente.

On peut dire que telle surface curviligne est plus grande, ou est moins grande que telle surface rectiligne ou que telle surface terminée par une courbe différente, en ce sens seulement que l'une pourrait contenir l'autre, ou en être contenue. Dans le même sens, il est permis de dire qu'un solide à surface courbe est plus grand, ou moins grand qu'un solide à surface plane ou qu'un solide à surface courbe de courbure différente.

L'on ne démontrera pas et l'on ne dira pas que toute corde est plus petite que l'arc qu'elle sous-tend, mais on dira et l'on pourra aisément démontrer qu'en divisant un arc en un nombre quelconque de parties, et en joignant les points de division par des cordes, la somme de ces cordes sera toujours plus grande que la seule corde de l'arc ainsi divisé.

Puisqu'il n'y a aucun rapport de longueur entre une courbe et une droite ; qu'une droite ne saurait égaler en longueur une courbe ; qu'il ne peut y avoir aucun rapport de quantité entre des surfaces courbes ou curvilignes et des surfaces planes ou rectilignes, ni entre des solides à surfaces courbes et des solides à surfaces planes, il faut rejeter les spéculations par lesquelles on a prétendu montrer que, *de toutes les figures isopérimètres, le cercle a l'aire la plus grande, et que la sphère a un volume plus grand que celui des polyèdres ou solides de toute autre construction ou conception qui aurait une surface égale à la sienne.* On se met à un point de vue faux quand on conçoit et démontre de tels rapports.

Bien qu'il n'y ait pas de rapport de quantité entre des grandeurs hétérogènes, comme, par exemple, entre une courbe et une droite, si on rapporte chacune de ces grandeurs à une unité particulière à sa nature, et que l'on considère ensuite le nombre des unités contenues par chacune d'elles, on pourra concevoir un rapport entre ces nombres abstraits. Si, par exemple, une courbe est divisée en quatre parties égales prises pour unités curvilignes, et qu'une droite soit divisée en deux parties égales regardées comme unités rectilignes, on concevra le rapport abstrait de 4 à 2, mais non point vraiment le rapport de la ligne courbe à la ligne droite. Il ne serait point rationnel de considérer l'une comme divisée par l'autre, soit que, par cette division, l'on entendît que l'une est contenue en l'autre un certain nombre de fois, soit que l'on comprît que l'une multipliée par tel nombre reproduirait l'autre. Il est évident, en effet, qu'une droite n'est pas contenue dans une courbe, et réciproquement qu'une courbe n'est pas contenue dans une droite. De même, il est impossible qu'une courbe multipliée, prise un nombre de fois quelconque, forme une droite ou la valeur d'une droite, et réciproquement.

On peut néanmoins, sans violer le principe d'homogénéité, admettre qu'il existe un même rapport géométrique, ou arithmétique, entre deux quantités ou grandeurs homogènes d'une part, et entre deux autres quantités ou grandeurs hétérogènes aux premières, mais homogènes entre elles, d'autre part. Ainsi, par exemple, on conçoit qu'il y ait un même rapport géométrique entre deux parties x et y d'une courbe A, et entre deux droites C et D, ou deux parties K et L d'une courbe B. On aura ainsi,

$$x : y :: C : D \text{ ou } :: K : L.$$

Et, en remplaçant ces quantités par les signes exprimant les nombres de leurs unités respectives, et en regardant abstractivement ces nombres, on pourra appliquer à cette proportion les propriétés communes aux proportions géométriques en général.

§ 3.

Des axiomes de l'Algèbre.

L'algèbre n'est qu'une sorte d'arithmétique où les quantités, les opérations sont représentées par des chiffres, par des lettres et quelques autres figures particulières. On peut donc dire que les axiomes de l'algèbre sont ceux de l'arithmétique, dont je me suis occupé plus haut.

CHAPITRE IV

DU BUT ET DES MOYENS DU RAISONNEMENT

En raisonnant, on se propose ou de démontrer une vérité, ou de donner à une question une solution certaine : dans le premier cas, la proposition est nommée *théorème;* dans l'autre, elle prend le nom de *problème.*

La science met au service du raisonnement divers moyens. Un de ces moyens est la *définition.*

La définition est bien importante; elle peut être fort utile quant elle est suffisante, précise, juste; car, avant tout, il faut que l'on sache bien la valeur, la signification des mots qui expriment les objets, les idées qui entrent dans les théorèmes ou dans les problèmes.

Mais il est des choses, des qualités, qui ne sauraient être définies : ce sont les idées simples. On ne peut définir que des idées composées.

On peut définir le corps, la surface, la ligne, la sphère, le cercle. L'on définit assez bien ces objets, si l'on dit qu'un *corps* ou solide est un objet qui a les trois dimensions, longueur, largeur et hauteur ou épaisseur; qu'une *surface* est une étendue qui a seulement longueur et largeur; qu'une *ligne* est une longueur sans largeur; qu'une *sphère* est un solide limité par une surface dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé *centre* de la sphère; que le *cercle* est une surface limitée par une ligne dont tous les points sont à égale distance d'un point nommé *centre* du cercle.

Mais on ne saurait définir la ligne droite ni le plan. On ne saurait non plus définir l'*égalité* mathématique. Ces idées-là sont simples.

On a voulu définir la ligne droite. Ainsi Euclide la définit, *celle qui est également placée entre ses points*. Mais ce n'est point là une vraie définition. Le mot *également* qui y figure pour exprimer l'idée de *droite*, de la qualité d'être *droite*, *directe*, ne peut l'exprimer qu'en tant que synonyme de *directement* : on ne fait donc que mettre à la place d'un mot un mot exprimant la même idée; c'est comme si l'on disait : « La ligne droite est celle qui *demeure directement* (*droitement*) *entre ses points.* » C'est-à-dire qui est droite [1].

1. Je trouve dans tel dictionnaire : droit, droite, *qui n'est pas courbe ;* courbe, *qui n'est pas droit.*

Évidemment, ce ne sont pas là des définitions. Le dictionnaire, toutefois, peut procéder ainsi. Un tel procédé n'est pas absolument inutile, car il se peut que telle personne qui ne connaît pas la signification d'un mot, sache celle du mot exprimant l'idée contraire. D'ailleurs le dictionnaire indique ainsi que tels mots ont un sens opposé.

Pour définir la ligne droite, beaucoup de géomètres ont dit qu'elle est *le plus court chemin d'un point à un autre*. Or ceci n'est pas encore une vraie définition; car l'idée exprimée par les mots *le plus court chemin d'un point à un autre* n'est pas l'idée de *ligne droite*. Si l'on peut affirmer de la ligne droite, qu'elle est le plus court chemin d'un point à un autre, c'est comme conséquence de l'idée de ligne droite, et la conséquence d'une idée n'est pas cette idée même. Si donc l'on regarde comme évident en soi qu'une ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, que l'on mette cette proposition au rang des axiomes et non pas au rang des définitions.

Il y a plus, cette affirmation que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, n'est point complétement rationnelle; car on entend que la ligne droite est un chemin plus court non-seulement que toute ligne brisée, mais encore que toute ligne courbe d'un point à un autre; or cette dernière conception est vicieuse, car il n'y a pas de rapport de longueur, de quantité, entre une droite et une courbe. Ainsi, une géométrie rationnelle supprimera cette affirmation et comme définition et comme axiome; mais elle pourra poser comme axiome que d'*un point à un autre toute ligne droite est plus courte que toute ligne brisée.*

Euclide a défini la surface plane (le plan), *celle qui est également placée entre ses points.* Il est évident qu'une critique analogue à celle que j'ai présentée contre sa définition de la ligne droite doit faire rejeter celle-ci.

Legendre a donné cette définition : *Le plan est une surface dans laquelle prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est tout entière dans la surface.* — Cette affirmation indique une conséquence de l'idée de plan, mais n'exprime pas vraiment l'idée de plan : une telle expression est impossible. La proposition présentée par ce géomètre comme définition du plan contient réellement un axiome relatif au plan.

La géométrie rationnelle ne définira donc pas le plan; mais elle pourra poser cet axiome :

« Si, dans un plan, on prend deux points à vo- « lonté, et si l'on joint ces deux points par une ligne « droite, cette ligne sera tout entière dans la sur- « face. »

L'égalité, ai-je dit, ne peut vraiment se définir. En effet, c'est une idée simple. On ne définit pas, par exemple, l'égalité de deux surfaces, en disant que *deux surfaces égales sont celles qui, étant superposées, coïncident entièrement ou pourraient ainsi coïncider par une certaine disposition de leurs par-*

ties. Je l'ai déjà fait observer, plus haut, l'égalité d'étendue n'est pas la coïncidence par superposition : ce sont là des idées différentes.

Qu'on dise que deux surfaces sont égales, si, étant superposées, elles coïncident; mais qu'on le dise pour assurer une vérité évidente par elle-même, non pour faire une définition.

Il y a puérilité à vouloir tout définir. Il est une foule d'idées simples, par conséquent une foule d'idées qui ne sauraient être exprimées par des définitions.

On a dit qu'il ne fallait pas commencer pa. définir; qu'il fallait, avant de définir une qualité, une chose, démontrer son existence, sa possibilité. — Je ne vois pas bien l'utilité de procéder ainsi : Qu'importe que je définisse avant d'établir la possibilité ou la nécessité de ce que je définis, si ensuite j'établis cette possibilité ou cette nécessité ? — Au reste, il y a des possibilités, des nécessités qui ne s'établissent pas, ne se prouvent pas, mais se sentent, se voient par intuition directe.

Le *corollaire*, qui est une conséquence d'une ou plusieurs propositions; le *lemme*, qui est une proposition pour préparer à la démonstration d'une autre, et la *scolie*, qui est une remarque relative à une proposition précédente, doivent être rangés parmi les moyens du raisonnement.

Les uns ont dit que le corollaire ne devait jamais être une démonstration, qu'il ne comportait qu'une déduction simple et directe d'une démonstration. D'autres ont assuré que le corollaire pouvait admettre une démonstration véritable. C'est une question de mot. J'adopte toutefois la dernière opinion. Il y a plus, on peut, et il faut même généralement regarder un corollaire comme une démonstration réelle dont les prémisses ne sont pas complétement exprimées, et quelquefois même sont seulement implicites.

Prenons quelques exemples.

Legendre, à la suite de la démonstration de ce théorème (proposition II, *Élém. de géométrie*) : *Toute ligne droite CD qui en rencontre une autre AB, fait avec celle-ci deux angles adjacents ACD, BCD, dont la somme est égale à deux angles droits*, pose ce corollaire :

« Si l'un des angles ACD, BCD est droit, l'autre « le sera pareillement. »

En réalité il y a ici un raisonnement dont les prémisses sont sous-entendues : l'une de ces prémisses est l'énoncé même du théorème ; l'autre peut se formuler ainsi : *Un angle droit et un angle droit égalent deux angles droits.*

A la suite du même théorème, Legendre émet cet autre corollaire : « Tous les angles consécutifs

« BAC, CAD, DAE, EAF, formés d'un même côté « de la droite BF, pris ensemble, valent deux angles « droits; car leur somme est égale à celle des deux « angles adjacents BAC, CAF. » — Il y a évidemment ici une démonstration dont l'une des prémisses, sous-entendue, est l'énoncé du théorème. L'autre est exprimée par cette phrase : « Car leur somme « est égale à celle des deux angles adjacents BAC, « CAF. »

Alors même que le corollaire pourrait se déduire de la seule proposition à la suite de laquelle il est présenté, on pourrait encore supposer une autre proposition sous-entendue, et ramener le corollaire à une véritable démonstration comprenant plusieurs prémisses.

Ainsi, après avoir démontré que si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ces deux triangles superposés coïncideront entièrement, on peut poser, comme corollaire, que ces deux triangles sont égaux : c'est en effet une conséquence évidente de leur coïncidence; et là il n'est pas nécessaire, pour conclure leur égalité, de juger que tous triangles ou toutes figures qui coïncident sont égales; mais on peut cependant émettre ici ce jugement, le faire figurer comme prémisse et avoir ainsi un vrai syllogisme. En ce cas, d'ailleurs, la proposition sous-entendue serait un axiome; or les géomètres sont dans l'usage de poser les axiomes et de les citer quand ils peuvent figurer dans leurs spéculations.

Le raisonnement se produit sous des formes différentes qui en sont autant de moyens divers. Je n'indiquerai point ici toutes ces sortes de moyens : c'est à la logique qu'il appartient de donner cet enseignement.

Considérées sous un point de vue, ces diverses formes peuvent se rapporter à deux modes, à deux méthodes principales : la forme ou méthode *synthétique*, ou la *synthèse;* la forme ou méthode *analytique*, ou l'*analyse*.

Dans la synthèse, on part de principes, de vérités déjà connues, dont on déduit ce qu'on veut démontrer.

L'analyse procède d'une manière inverse. On suppose vrai ce qu'il faut prouver, ou l'on regarde comme résolu un problème qu'il s'agit de résoudre; puis on tire les conséquences qui découlent de cette supposition, et, de conséquence en conséquence, on parvient à quelque proposition manifestement vraie ou fausse, ou à quelque chose de visiblement possible ou impossible à exécuter, selon qu'il s'agit d'un théorème ou d'un problème. Cette dernière conséquence à laquelle on arrive décide de la vérité ou de la possibilité de la proposition.

Pour justifier les dénominations de *synthèse* et d'*analyse*, on dit que, dans la synthèse, on *joint*, en quelque sorte, plusieurs vérités pour en déduire une nouvelle; que de là lui vient le nom de synthèse, qui signifie *composition*. On dit que, dans l'analyse, au contraire, une proposition encore incertaine, supposée vraie, est décomposée en ses parties, toutes nécessairement vraies et liées ensemble, si la proposition est vraie, ou fausses ou répugnantes entre elles, si elle est fausse; que de là lui est venu le nom d'*analyse*, qui signifie *décomposition*. Ces explications sont satisfaisantes, si l'on s'attache à ce qui caractérise vraiment ces diverses méthodes, et si l'on ne prend pas dans un sens trop littéral les mots *composition*, *décomposition*. On dit aussi, avec vérité, pour caractériser ces différents procédés, que, dans la synthèse, on va du simple au composé, du connu à l'inconnu, du tronc aux rameaux; que, dans l'analyse, on va du composé au simple, de l'inconnu au connu, des rameaux au tronc.

L'analyse pèche, n'est pas admissible dans le sens général qu'on lui attribue. En ce sens général, en effet, si, posant comme vrai ce qui est en question, on arrive, de conséquence en conséquence, à une proposition qui est reconnue vraie, incontestable, on doit conclure que la première, celle posée comme vraie hypothétiquement, est de même certaine, est prouvée. Or je ne saurais accepter une telle doctrine; car il ne m'est point évident, ni démontré, qu'une proposition fausse ne peut mener, par voie de conséquences, à quelque vérité. J'accorde qu'une vérité ne saurait, par la voie logique, conduire à une erreur, à une impossibilité; mais je n'accorde pas l'inverse.

En ce cas de l'analyse, où, partant d'une hypothèse, on est conduit logiquement à une proposition reconnue vraie, certaine, et que, par la raison que je viens de présenter, on ne peut regarder ce raisonnement comme une démonstration de l'hypothèse, il peut être néanmoins évident, par la nature de l'hypothèse et des conséquences déduites, que l'hypothèse est vraie; mais *en soi*, à part la *nature* des propositions enchaînées par le raisonnement, cette sorte d'analyse ne prouve pas, ne démontre pas, ne constitue pas une solution réelle, complète. La forme analytique alors est, à ce point de vue, insuffisante, infirme, stérile; elle sert seulement à fournir des éléments pour reconnaître, par voie d'intuition, d'évidence rationnelle, une vérité non démontrée. On peut se dire alors : Ici, il est visible que, si l'hypothèse n'était pas vraie, elle ne conduirait pas logiquement à une vérité, qu'elle mènerait au contraire à quelque impossibilité, à quelque contradiction.

Mais l'analyse peut, par elle-même, offrir des solutions complètes, des démonstrations directes.

Pour mettre à même de saisir les différences essentielles que je viens de signaler dans l'emploi de la méthode analytique, je vais citer des exemples.

Je tirerai le premier des *Éléments* d'Euclide. Il s'agit de ce théorème : « Que la droite AB (fig. 7) « soit coupée en extrême et moyenne raison au point « Γ, que AΓ soit le plus grand segment, et faisons « AΔ égal à la moitié de AB ; je dis que le carré de « ΓΔ est quintuple du carré de ΔA.

Euclide, pour démontrer analytiquement cette proposition, raisonne ainsi, en la supposant vraie :

« Car, puisque le carré de ΓΔ est quintuple du « carré de ΔA, et que le carré ΓΔ est égal aux carrés « des droites ΓA, AΔ, conjointement avec le double « rectangle sous ΓA, AΔ (4.2), les carrés des droites « ΓA, AΔ, conjointement avec le double rectangle « sous ΓA, AΔ, seront quintuples du carré de la « droite AΔ ; donc, par soustraction, le carré de ΓA, « conjointement avec le double rectangle sous ΓA, « AΔ, sera quadruple du carré de AΔ. Mais le rec- « tangle sous BA, AΓ, est égal au double rectangle « sous ΓA, AΔ ; car BA est double de AΔ, et le rec- « tangle sous AB, BΓ, est égal au carré de AΓ (17.6), « car AB est coupé en extrême et moyenne raison ;

« le rectangle sous BA, AΓ, conjointement avec le « rectangle sous AB, BΓ, est quadruple du carré « de AΔ. Mais le rectangle sous BA, AΓ, conjointe- « ment avec le rectangle AB, BΓ, est le carré de « AB (2.2); le carré de AB est donc le quadru- « ple du carré de AΔ. Mais cela est (cor. 20,6), « puisque BA est double de AΔ. Donc, etc.... »

Cette argumentation rentre dans les cas où l'analyse ne prouve pas vraiment ce qui est en question; elle n'est pas légitime. Euclide, en effet, ne prouve point ici ce qu'il a avancé, savoir, que, dans l'espèce, le carré de ΓΔ est quintuple du carré de ΔA. De ce que cette proposition, étant supposée vraie, conduit, par un enchaînement de conséquences, à une vérité, à une autre proposition reconnue vraie, qui est que le carré de AB est le quadruple du carré de AΔ, s'ensuit-il que l'hypothèse est fondée? Non; ce procédé n'est pas logique. Je vois bien, par cette analyse, où me mène l'hypothèse; je vois bien qu'il ne peut être vrai que ΓΔ soit quintuple du carré de AΔ, sans qu'il s'ensuive que le carré de AB soit le quadruple du carré de AΔ; mais je ne vois pas l'inverse, savoir que cette dernière vérité implique, entraîne avec elle la première : cette analyse est donc impuissante; elle ne fournit pas une preuve, une démonstration. Seulement on peut voir, en considérant la nature des propositions qui la constituent, que l'on ne serait pas arrivé à la dernière conséquence si la première proposition n'était pas vraie. On peut sentir qu'il y a une liaison nécessaire entre l'une et l'autre, mais c'est par une intuition particulière et en dehors de la forme du raisonnement, qui, considéré en lui-même, ne prouve rien.

Voici maintenant un exemple que je prends dans l'*Histoire des mathématiques* de Montucla. C'est un des cas où la forme analytique est démonstrative et peut être employée légitimement.

Problème. Un carré AC (fig. 8) étant donné, et le côté CD étant prolongé, on demande d'inscrire dans l'angle FCB, une ligne comme EF d'une grandeur donnée, et qui, prolongée, aille passer par l'angle A.

« Supposons, d'abord, que AEF soit la position « de la ligne cherchée, et soit tirée à cette ligne « AEF la perpendiculaire FH jusqu'à AB prolongée; « soit tirée aussi FG perpendiculaire à BH. Cela « fait, on voit que AB : BE : : FG : GH. Or FG « = AB, conséquemment GH est égale à BE. De « plus, CF : CE : : AB ou CB : BE; donc le rec« tangle de CF par BE est égal à celui de CE par « CB, ou de leurs égales BG, GH. Ce qui nous « servira pour la solution du problème.

« Supposons donc maintenant, continue Montucla,

« qu'il soit résolu, c'est-à-dire que EF soit de la « grandeur donnée. Donc le carré EF sera aussi « donné ou connu, et par conséquent la somme de « CE^2 et CF^2; ajoutons-y celui de CB aussi connu, « qui est égal à $CE^2 + 2\,CE \times EB + EB^2$ connue; « or $BG = CF$ et $2\,CE^2 + 2\,CE \times EB = 2\,CE$ « $\times\ CB$; donc $BG^2 + 2\,CE \times CB + EB^2$ est « connue. Mais $2\,CE \times CB = 2\,GH \times BG$, par « ce qu'on a vu plus haut, et $EB^2 = GH^2$; ainsi « $BG^2 + 2\,GH \times BG + GH^2$ sera donné : or « cette somme forme le carré de BH; donc le carré « de BH est donné, savoir, égal à la somme de « ceux de EF et CB. Le problème est donc résolu, « car il ne s'agit que de prendre BH telle que son « carré égale ceux de CB, et de la grandeur assi- « gnée à EF, pris ensemble, après quoi l'on décrira « sur AH un demi-cercle qui coupera la ligne DCF « au point cherché F. »

L'analyse, telle qu'elle est conçue et appliquée dans cet exemple, est valide et donne une démonstration complète. Il est, en effet, incontestable, par le raisonnement employé sous cette forme d'analyse, que, quelle que soit la grandeur de la ligne cherchée EF, cette ligne étant décrite, placée dans les conditions du problème, la ligne représentée par BH^2 devra égaler le carré de la ligne EF plus le carré de la ligne représentée par CB. Il y a entre ces lignes, par suite de leur disposition respective, du rapport de construction existant entre elles, ce rapport de grandeur exprimé ici par $BH^2 = EF^2 + CB^2$, et ce rapport suffit, d'après les données du problème, pour déterminer la grandeur de EF et le point F ou EF coupe le prolongement de DC.

Examinons encore un exemple d'analyse puisé dans le même ouvrage, et qui concerne une propriété du cercle. Le voici.

La ligne AB (fig. 9) étant la base d'une infinité de triangles dont les côtés, comme AD, BD ou A*d*, B*d*, ont toujours un rapport déterminé, il s'agit de démontrer que la courbe où se trouvent les sommets de tous ces triangles, ou, en langage géométrique, que le lieu de ces sommets est un cercle.

« J'aperçois, d'abord, dit Montucla, que quand « on divisera AB en E, de sorte que AE soit à EB « dans la raison donnée, et qu'on prendra le point « F tel que AF et BF soient encore dans le même « rapport, les points E, F, appartiendront à la « courbe cherchée ; car AEB n'est que le dernier « triangle obtus-angle, et AFB le dernier acutangle « en *d*, lorsqu'ils se confondent avec la ligne droite. « On voit enfin que cette courbe doit être fermée et « ressemblante à un demi-cercle ou à une demi-« ellipse. Ainsi il est naturel d'examiner d'abord « si elle est un demi-cercle ; supposons donc que

« cela soit ; car, si nous nous trompons dans notre « conjecture, l'analyse nous l'apprendra en nous « conduisant à des contradictions.

« Que la ligne EDF soit donc un demi-cercle ; le « triangle DEC sera isocèle ; d'un autre côté, l'angle « ADB sera divisé en deux également par la ligne « ED, puisque AD : DB : : AE : EB. Donc les angles « EDC + EDA seront égaux à DEC + EDB (à cause « de l'égalité des côtés EC, DC, qui font l'angle « EDC = l'angle DEC ; or ces derniers sont égaux à l'angle externe DBC : donc l'angle B dans le « triangle DBC est égal à l'angle D dans ADC ; « mais l'angle C leur est commun ; conséquemment « ils sont semblables, et en comparant les côtés « homologues, CB : CD ou CE : : CD ou CE : CA. « Donc, en composant d'abord, on a CB + CD ou « BF : CE : : CA — CE ou AE : CA. Donc, ex æquo, « EB : AE : : BF : AF, or AF : BF (par la construc- « tion) comme AD : DB. Ainsi AE : BE : : AD : DB, « ce qui est précisément l'hypothèse. C'est donc une « propriété et une propriété assez remarquable du « cercle que, de quelque point de sa circonférence « qu'on tire des lignes DA, DB, aux points A, B, « elles seront toujours dans la même raison. »

Alors même que cette argumentation ne contiendrait aucune proposition irrationnelle, elle ne constituerait pas une véritable démonstration ; mais elle me paraît essentiellement défectueuse. On remarquera qu'elle est basée sur cette proposition, que, si AB est divisé en E de sorte que AE soit à EB dans la raison donnée, et qu'on prenne le point F tel que AF et BF soient encore dans ce même rapport, les points E, F, appartiendront à la courbe cherchée; proposition que l'on croit justifier en alléguant que AEB n'est que le dernier triangle obtus-angle, et AFB le dernier acutangle en *d*, lorsqu'ils se confondent avec la ligne droite.

Or cette allégation est certainement fausse : les lignes droites AEB, AFB, ne sont point des triangles. Vainement on dirait qu'il faut entendre que AEB est la *limite* des triangles obtus-angles, et AFB la *limite* des triangles acutangles en *d* : cette considération ne montrerait pas non plus la nécessité, pour les points E, F, d'appartenir, dans l'hypothèse, à la courbe cherchée. Il est permis de supposer, jusqu'à preuve contraire, qu'il n'en sera pas, à la limite, comme hors de la limite.

On peut, il est vrai, supprimer cette partie préliminaire de l'argumentation, supposer de suite que la courbe est un demi-cercle, passant par E et F; que AE est à EB dans la raison donnée, que AF est à BF dans le même rapport, et arriver, en procédant d'ailleurs comme on l'a fait, à cette conclusion, AE : BE :: AD : DB. Mais là encore il n'y aura point une véritable démonstration ; on n'aura pas vraiment prouvé que la courbe cherchée est un cercle. Seulement, d'après la nature des propositions qui entrent dans le raisonnement et d'après l'enchaînement, l'accord que l'on aperçoit entre ces mêmes propositions, on peut, par une intuition particulière, voir et conclure qu'en effet c'est un cercle qui constitue la courbe en question.

Les divers exemples que j'ai présentés, et les observations dont je les ai accompagnés, montrent qu'il faut distinguer entre les différents cas d'analyse, pour juger si le procédé analytique est légitime. L'exemple pris dans les Éléments d'Euclide n'est pas, on l'a vu, une vraie démonstration. Le second exemple fournit, au contraire, une démonstration suffisante ; mais il est facile de voir que la proposition d'Euclide n'est point de même forme que celle de Montucla. La proposition d'Euclide est un théorème, tandis que celle de Montucla est un problème, et il est aisé de comprendre que nul théorème ne pourrait se démontrer par la voie de l'analyse employée par Euclide : la critique que j'en ai présentée plus haut suffit pour faire voir où pèche ce mode de raisonnement.

Il faut donc rejeter ce mode, et n'employer l'analyse, telle qu'elle est définie plus haut, qu'en ce qui concerne la solution des problèmes, des propositions qu'on pourra présenter sous la forme de questions à résoudre, et qu'on pourra traiter d'après un procédé analogue à celui appliqué au second problème dont j'ai reproduit la solution.

On trouve dans Euclide d'autres exemples d'une vicieuse application de l'analyse. Il n'est point le seul mathématicien qui ait abusé de cette forme de raisonnement. Beaucoup ont cru, comme Euclide, qu'on prouvait une hypothèse par cela seul que l'analyse en faisait jaillir une vérité. J'accorde cependant que ces argumentations, impuissantes comme démonstrations, sont de nature à éclairer l'esprit, au point de lui donner l'intuition de la vérité des hypothèses qu'il s'agit de prouver et qui ne sont pas véritablement prouvées par l'analyse. Ce procédé, d'ailleurs, peut mener à une conséquence conforme à la vérité, et de laquelle on puisse ensuite remonter synthétiquement à l'hypothèse, de telle sorte que l'analyse procurerait une démonstration synthétique. On peut aussi employer l'analyse, dans tous les cas, en vue de reconnaître si une hypothèse mènerait à l'absurde. Ce serait alors comme un ballon d'essai qui serait lancé. Si, en effet, une proposition doit avoir des conséquences impossibles, on l'abandonnera. Si elle n'a pas de telles conséquences, ou si elle conduit, par voie logique, à une vérité, on examinera si ce résultat est de nature à confirmer, par la voie synthétique, l'hypothèse en question. Si cette confirmation est refusée, il faudra recourir à d'autres recherches pour s'assurer de la vérité de l'hypothèse, ou du moins, pour la prouver.

Remarquons que, même alors qu'on obtient analytiquement une démonstration, on ne peut point toujours remonter synthétiquement le cours du raisonnement qui a conduit à ce résultat, c'est-à-dire revenir à l'hypothèse, en passant par la suite inverse des propositions qui ont donné la dernière.

Montucla, comme bien d'autres mathématiciens, acceptait le sens général dans lequel on entend et définit la méthode analytique; en traitant ce sujet, il ne distingue pas entre les différents genres d'analyse quant à leur validité, leur force démonstrative. Il n'a point reconnu le vice de l'analyse appliquée aux théorèmes, comme l'ont pratiquée Euclide et plusieurs autres.

Si le procédé analytique était admis dans tous les cas, on pourrait, par cette voie, prouver des principes faux, des doctrines erronées. Ainsi, par exemple, on alléguerait que, puisque l'hypothèse des infiniment petits et la théorie infinitésimale conduisent à des résultats vrais, exacts, les infiniment petits et la théorie infinitésimale sont vrais, sont rationnellement admissibles en eux-mêmes. Et pourtant la raison, en dépit de ce sophisme, ne saurait adopter les infiniment petits, elle rejette ce système ingénieux qu'on appelle la théorie infinitésimale, qui repose sur des données fausses, et pourtant fait aboutir à des conclusions qui sont, à d'autres points de vue, reconnus conformes à la vérité.

Il serait facile de trouver d'autres exemples pour montrer l'illégitimité du procédé analytique dont il s'agit. Si on l'admettait, on pourrait, de cette manière, prouver que tous les angles aigus sont égaux ; on dirait :

« Que tous les angles aigus soient égaux. Les trois angles d'un triangle équilatéral sont aigus : cela est visible même sans démonstration. Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux ; or cela est : donc il est vrai que tous les angles aigus sont égaux. »

Cet exemple montre clairement que la forme analytique en question n'est pas *probante* en soi.

Observons que la proposition : *les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux*, qui figure dans le raisonnement, se démontre sans qu'il soit besoin d'admettre que des angles aigus peuvent être inégaux, et par conséquent sans contredire la proposition première qui suppose l'égalité de tous les angles aigus.

CHAPITRE V

DES SPÉCULATIONS CONCERNANT LA MESURE DU CERCLE, CELLE DE SA CIRCONFÉRENCE ET CELLE DE LA SPHÈRE. — DE QUELQUES SPÉCULATIONS RELATIVES AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

Je me propose de montrer ici que ces spéculations sont fondées sur des données fausses et ne présentent aucune démonstration qu'on puisse rationnellement opposer aux principes que j'ai établis dans le § 2 du chapitre III.

Les géomètres ont admis et prétendu démontrer ces propositions : *les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons ou les diamètres; les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres ou de leurs rayons.*

Ces propositions sont inadmissibles : cela résulte des principes que j'ai posés et d'après lesquels il ne peut y avoir aucun rapport de quantité entre des courbes différentes, entre des cercles différents par leur courbure même.

Euclide, dans ses Éléments, liv. XII, proposition 2, pour démontrer ce théorème impossible, que les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres, présente une argumentation très-longue que je ne reproduis pas ici.

Il résulte de l'argumentation d'Euclide que si des cercles pouvaient être entre eux comme des carrés, comme le carré du diamètre de l'un, à une autre quantité, cette dernière quantité devrait être le carré du diamètre de l'autre cercle. Il démontre que le carré du diamètre d'un cercle ne pourrait être au carré du diamètre d'un autre cercle comme le premier cercle serait à une surface plus grande ou plus petite que l'autre cercle; mais il ne prouve point la réalité de cette proportion qu'il suppose entre des grandeurs qui sont hétérogènes, essentiellement différentes. On peut soutenir qu'il n'y a pas de proportionnalité possible entre des diamètres d'une part, et entre un cercle et une autre grandeur quelconque d'autre part. S'il était démontré, ou évident en soi, que le carré du diamètre d'un cercle A doit être au carré du diamètre d'un autre cercle B, comme le cercle A est à une certaine grandeur G, il est certain que, démontrant de plus que cette grandeur G ne peut être ni plus grande ni plus petite que le cercle B, il faudrait conclure comme Euclide; mais il n'est ni évident ni démontré que le carré du diamètre d'un cercle A doit être au carré du diamètre d'un autre cercle B, comme le cercle A est à une certaine grandeur G. L'argumentation du grand géomètre est donc sans base réelle, sans fondement. Il m'est au contraire évident que la proportionnalité supposée est impossible. Si le quatrième terme G était possible, la grandeur G serait ou un plan terminé par des lignes droites, ou un plan terminé par une ou plusieurs lignes courbes, ou une surface courbe. G est-il un plan rectiligne? non; un cercle ne peut être à une grandeur de ce genre comme un carré est à un carré. G est-il terminé en totalité ou en partie par une ou plusieurs lignes courbes? non encore : car, étant supposé terminé par une seule courbe, si la courbure était partout semblable à celle du cercle A, alors G serait le cercle A, ce qui exclurait le rapport conclu. Si G était terminé en partie par une ligne de même courbure que la circonférence de A, et en partie par des lignes droites, il serait encore impossible de trouver, dans sa totalité, une quantité à laquelle A serait comme un carré est à un carré. Évidemment aussi une surface courbe, une surface non plane, quelle que fût sa courbure, ne saurait fournir G, car il n'est aucun rapport de quantité entre un plan et une surface courbe.

L'impossibilité d'une proportion entre des cercles et les carrés de leurs diamètres existe, alors même que les diamètres des cercles dont il s'agit sont commensurables l'un par l'autre, ont entre eux une commune mesure.

Legendre, dans ses *Éléments de Géométrie,* liv.

prop. XI, présente ce théorème : *Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons.*

Il raisonne ainsi :

« Désignons, pour abréger, par circ. CA (fig. 10) « la circonférence qui a pour rayon CA ; je dis qu'on « aura circ. CA : circ. OB : : CA : OB.

« Car, si cette proportion n'a pas lieu, CA sera « à OB comme circ. CA est à un quatrième terme « plus grand ou plus petit que circ. OB : suppo- « sons-le plus petit, et soit, s'il est possible, CA : OB « : : cir. CA : circ. OD. Inscrivez dans la circonfé- « rence dont OB est le rayon un polygone régulier « EFGKLE, dont les côtés ne rencontrent point la « circonférence dont OD est le rayon ; inscrivez un « polygone semblable MNPTSM dans la circonfé- « rence dont CA est le rayon.

« Cela posé, puisque ces polygones sont sem- « blables, leurs périmètres MNPSM, EFGKE, sont « entre eux comme les rayons CA, OB, des cercles « circonscrits, et on aura MNPSM : EFGKE : : CA : « OB ; mais, par hypothèse, CA : OB : : circ. CA : « circ. OD. Donc MNPSM : EFGKE : : circ. CA : circ. « OD. Or cette proportion est impossible, car le « contour MNPSM est moindre que circ. CA, et au « contraire, EFGKE est plus grand que circ. OD ; « donc il est impossible que CA soit à OB comme

« circ. CA est à une circonférence plus petite que « circ. OB, ou, en termes plus généraux, il est im- « possible qu'un rayon soit à un rayon comme la « circonférence décrite du premier rayon est à une « circonférence plus petite que la circonférence dé- « crite du second rayon.

« De là je conclus qu'on ne peut avoir non plus, « CA est à OB comme circ. CA est à une circonfé- « rence plus grande que circ. OB; car, si cela était, « on aurait, en renversant les rapports, OB est à CA « comme une circonférence plus grande que circ. « OB est à circ. CA, ou, ce qui est la même chose, « comme circ. OB est à une circonférence plus petite « que circ. CA; donc un rayon serait à un rayon « comme la circonférence décrite du premier rayon « est à une circonférence plus petite que la circon- « férence décrite du second rayon, ce qui a été dé- « montré impossible.

« Puisque le quatrième terme de la proposition « CA : OB : : circ. CA : X, ne peut être ni plus petit « ni plus grand que circ. OB, il faut qu'il soit égal « à circ. OB; donc les circonférences des cercles « sont entre elles comme les rayons.

« Un raisonnement et une construction entière- « ment semblables serviront à démontrer que les « surfaces des cercles sont comme les carrés de « leurs rayons. »

Cette argumentation de Legendre diffère peu de celle d'Euclide, que j'ai précédemment critiquée. Ma critique peut s'appliquer aussi au théorème de Legendre. Tout ce que montre ce théorème, c'est que, s'il pouvait y avoir un rapport de quantité entre des cercles différents, entre des circonférences de cercles différents, ces circonférences devraient être entre elles comme les rayons; et les surfaces des cercles devraient être entre elles comme les carrés des rayons. Mais tous rapports de quantité étant impossibles entre ces grandeurs hétérogènes, le théorème croule faute de base; il repose sur une donnée impossible : l'hypothèse de rapports de grandeur entre des courbes essentiellement différentes. Remarquons aussi que l'argumentation se fonde sur une proposition précédente du même géomètre, qui est celle-ci : *Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe AMB, est plus longue que la ligne enveloppée AMB;* or cette proposition elle-même implique un rapport de quantité entre une courbe et une droite, rapport impossible. D'ailleurs, pour la démontrer, Legendre s'appuie sur un principe faux.

Comment raisonne-t-il? « Si, dit-il, la ligne AMB « (fig. 11) n'est pas plus petite que toutes celles « qui l'enveloppent, il existera parmi ces dernières « une ligne plus courte que toutes les autres, laquelle

« sera plus petite que AMB, ou tout au plus égale à « AMB. Soit ACDEB cette ligne enveloppante ; entre « les deux lignes, menez partout où vous voudrez la « droite PQ, qui ne rencontre point la ligne AMB, « ou du moins qui ne fasse que la toucher ; la droite « PQ est plus courte que PCDEQ ; donc, si à la partie « PCDEQ on substitue la ligne droite PQ, on aura « la ligne enveloppante APQB plus courte que « APDQB ; mais, par hypothèse, celle-ci doit être « la plus courte de toutes ; donc cette hypothèse ne « saurait subsister ; donc toutes les lignes envelop- « pantes sont plus longues que AMB. »

Si l'on peut, objecterai-je, supposer, avant la démonstration contraire, qu'une ligne enveloppante peut être plus courte que la ligne enveloppée, je ne vois pas pourquoi il faut admettre que la ligne enveloppante supposée plus petite que AMB, ou égale à AMB, serait la plus courte de toutes les lignes enveloppantes possibles. On peut admettre plusieurs lignes, une infinité de lignes de différentes longueurs de plus en plus courtes, dont chacune soit plus courte que la ligne enveloppée AMB ; on peut, en effet, entre les lignes ACDEB et AMB de la figure de Legendre, imaginer un nombre indéfini de lignes qui, toutes, seront plus courtes que ACDEB. Encore une fois, la proposition n'implique pas que la ligne enveloppante ne saurait être plus courte que la ligne enveloppée, ou égale à cette ligne, qu'à la condition d'être la plus courte de toutes les lignes enveloppantes. Le raisonnement de Legendre, qui est basé sur cette condition, est donc caduc. Il aurait mieux fait d'invoquer l'évidence de raison. Au reste, pour que la proposition fût vraiment rationnelle, il faudrait ne la présenter que sous la restriction de lignes droites et brisées comparées dans leur longueur, puisqu'il n'est pas de rapport de longueur entre des courbes et des droites, ou entre des courbes différentes.

Lacroix aussi a voulu démontrer que *les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.*

Pour atteindre ce but, il commence par démontrer ce théorème : *Si deux grandeurs invariables A et B sont telles qu'on puisse prouver que leur différence A — B est moindre qu'une troisième grandeur δ, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles;* et voici comment il raisonne :

« En effet, dit-il, si elles étaient inégales, on au-« rait nécessairement A — B = D, D marquant leur « différence : il ne serait donc pas impossible de « prendre δ au-dessous de D, et par conséquent « aussi petite qu'on voudrait. »

Armé de ce théorème, il aborde la proposition concernant le rapport des cercles et de leurs rayons ou diamètres.

« Quel que soit, dit-il, le nombre de leurs côtés, « pourvu qu'il soit le même dans l'un et dans l'autre, « les contours de deux polygones réguliers étant « entre eux comme les rayons des cercles dans les- « quels ils sont inscrits, si l'on désigne par p et p' « ces contours, et par R et R' les rayons des cercles « correspondants, on aura $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$, et de plus on « peut concevoir que le nombre des côtés des poly- « gones soit tel que la différence entre leur contour « et la circonférence du cercle dans lequel chacun « d'eux est inscrit soit au-dessous de telle grandeur « qu'on voudra. Si donc $\frac{C'}{C}$ est le rapport des circon- « férences, la différence entre les rapports $\frac{C'}{C}$ et $\frac{p'}{p}$, « s'il en existe une, pourra être réduite à tel degré « de petitesse qu'on voudra. Cette différence étant « aussi celle des rapports invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$, puis- « que $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$; on peut prouver que la différence « entre les quantités invariables $\frac{C'}{C} = \frac{R'}{R}$ est au-

« dessous de toute grandeur donnée : on aura donc,
« par la proposition précédente,

$$\frac{C'}{C} = \frac{R'}{R}, \text{ ou } C : C' :: R : R';$$

« ce qui donne aussi

$$C : C' :: 2R : 2R', \text{ ou } :: D : D',$$

« en appelant D et D′ les diamètres des cercles pro-
« posés. »

Ce théorème de Lacroix est tout d'abord rejeté par la raison, qui n'admet pas de rapport de quantité entre des circonférences différentes telles que celles qui sont supposées ici. Si l'argumentation de Lacroix était logique, elle montrerait seulement, comme celle de Legendre, que si un rapport de quantité était admissible entre des circonférences de cercles différents, ce rapport serait, devrait être le même que celui existant entre les rayons ou diamètres de ces mêmes cercles. Mais je prétends que ce n'est pas seulement la possibilité d'un tel rapport qui manque à ce théorème. Il pèche en lui-même, il est essentiellement illogique. Supposons, dirai-je, que le nombre des côtés des polygones inscrits dans deux cercles différents soit tel que la différence entre leur contour et la circonférence du cercle dans lequel chacun d'eux est inscrit, soit au-dessous de telle grandeur qu'on voudra ; il ne s'ensuivra point que si $\frac{C'}{C}$ est le rapport des circonférences, la différence entre les rapports $\frac{C'}{C}$ et $\frac{p'}{p}$, s'il en existe une, pourra être réduite à tel degré de petitesse qu'on voudra. En effet, puisque $\frac{p'}{p}$ exprime un rapport égal à $\frac{R'}{R}$, c'est-à-dire au rapport des rayons des cercles, quelque nombre de côtés qu'on donne aux polygones inscrits, leurs contours seront toujours dans le même rapport entre eux, et ainsi toujours $\frac{p'}{p}$ exprimera un même rapport, une quantité égale, et Lacroix lui-même reconnaît que $\frac{p'}{p}$ exprime un rapport invariable. Comment donc suppose-t-il que par l'effet de modifications qui n'apportent aucun changement dans la valeur réelle des rapports considérés, la différence entre ces rapports puisse diminuer, et même diminuer indéfiniment? Le raisonnement de Lacroix est un sophisme sous le masque d'une équivoque. Il confond les différences existant entre les circonférences et les polygones inscrits avec la différence du rapport des circonférences et du rapport des polygones inscrits.

Voici maintenant comment Lacroix raisonne pour démontrer que l'*aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon, ou $\frac{1}{2}$ CR, en nommant C la circonférence, et R le rayon.*

« En effet, dit-il, plus le nombre des côtés du « polygone circonscrit augmente, plus aussi son « périmètre A approche de la circonférence, et plus « le produit $\frac{1}{2}$ PR approche de $\frac{1}{2}$ CR, qu'il surpas- « sera toujours, mais d'aussi peu qu'on voudra. « D'un autre côté, l'aire du même polygone, tou- « jours plus grande que celle du cercle, peut « approcher de cette dernière aussi près qu'on « voudra : les produits $\frac{1}{2}$ PR, $\frac{1}{2}$ CR et la vraie me- « sure de l'aire du cercle sont donc trois quantités « placées dans les mêmes circonstances que les « quantités A, B et X du numéro précédent : donc « le produit $\frac{1}{2}$ CR est égal à la vraie mesure de l'aire « du cercle. »

Dans son numéro précédent auquel se réfère l'auteur, il a en effet démontré que *si trois grandeurs A, B et X sont telles, que la première A, que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours chacune des deux autres B, X, qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement B = X.*

L'argumentation est ici logique; elle ne pèche pas en elle-même comme celle que je viens de critiquer, relative à l'égalité de rapports qu'on suppose entre les circonférences des cercles et les rayons. Mais, pour rejeter la démonstration, il me suffit d'objecter qu'elle prouve seulement que si la surface d'un cercle pouvait égaler un rectangle, et que la circonférence pût être envisagée comme égalant en longueur une certaine ligne droite, l'aire du cercle devrait être égale à la moitié du produit de la circonférence par le rayon; or, ces conditions de rapport étant inadmissibles, le théorème croule, ne peut avoir la portée rationnelle qu'on lui attribue.

De ce théorème, Lacroix conclut, comme corollaire, que les aires des cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres. « En effet, dit-il, puisque l'on a cette proportion :

$$C : C' :: R : R'$$

« si on la multiplie par la proportion

$$\tfrac{1}{2} R : \tfrac{1}{2} R' :: R : R'$$

« Qui est évidente, il viendra

$$\tfrac{1}{2} CR : \tfrac{1}{2} C'R :: R^2 : R'^2$$

« proportion dans laquelle les deux termes du pre-

« mier rapport sont, d'après ce qui précède, les « mesures des aires des cercles dont les rayons sont « R et R'. De plus, il est visible qu'on a

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2$$

« en désigant par D et D' les diamètres, puisque « $D = 2R$, $D' = 2R'$: donc $\frac{1}{2}CR : \frac{1}{2}C'R'$ « $:: D^2 : D'^2$, ce qui complète l'énoncé de la pro- « position.

« Si l'on représente par π la circonférence dont « le diamètre est 1, la surface de ce cercle sera « $\frac{1}{4} \times \pi = \frac{1}{4}\pi$: on aura donc

$\frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2$, d'où $\frac{1}{2}C'R' = \frac{1}{4}\pi D'^2$,

« ce qui montre que *l'aire d'un cercle est égale au « carré du diamètre multiplié par le $\frac{1}{4}$ du rapport « de la circonférence au diamètre.*

« Enfin si l'on remplace R' par sa valeur $\frac{C'}{2\pi}$(1), il « en résultera $\frac{C'^2}{4\pi}$ pour l'aire du cercle exprimée « par sa circonférence. »

Toutes ces propositions tombent comme les théorèmes dont elles sont déduites ; elles ne sauraient se soutenir, étant contraires au principe d'homogénéité.

Legendre voulant démontrer que *l'aire du cercle*

1. En effet, on a $1 : \pi :: 2R' : C'$, d'où $C' = 2\pi R'$, et $R' = \frac{C'}{2\pi}$.

est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon, s'exprime ainsi :

« Désignons par surface CA (fig. 12) la surface « du cercle dont le rayon est CA ; je dis qu'on aura « surf. CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ circ. CA,

« Car si $\frac{1}{2}$ CA $\times$ circ. CA n'est pas l'aire du cercle « dont CA est le rayon, cette quantité sera la mesure « d'un cercle plus grand, ou plus petit. Supposons d'a- « bord qu'elle est la mesure d'un cercle plus grand, et « soit, s'il est possible, $\frac{1}{2}$ CA $\times$ circ. CA $=$ surf. CB.

« Au cercle dont le rayon est CA circonscrivez « un polygone régulier DEFG, etc., dont les côtés « ne rencontrent pas la circonférence qui a CB pour « rayon ; la surface de ce polygone sera égale à son « contour DE + EF + FG + etc., multiplié par « $\frac{1}{2}$ AC ; mais le contour du polygone est plus grand « que la circonférence inscrite, puisqu'il l'enve- « loppe de toutes parts ; donc la surface du polygone « DEFG, etc., est plus grande que $\frac{1}{2}$ AC $\times$ circ. AC, « qui, par hypothèse, est la mesure du cercle dont « CB est le rayon ; donc le polygone serait plus grand « que le cercle. Or, au contraire, il est plus petit, « puisqu'il y est contenu ; donc il est impossible que « $\frac{1}{2}$ CA $\times$ circ. CA soit plus grand que surf. CA, ou, « en d'autres termes, il est impossible que la circon- « férence d'un cercle multipliée par la moitié de son « rayon soit la mesure d'un cercle plus grand. »

L'auteur par un raisonnement analogue prétend montrer également que le même produit ne peut être la mesure d'un cercle plus petit. « Donc, con-« clut-il, la circonférence d'un cercle multipliée par « la moitié de son rayon est la mesure de ce même « cercle. »

Je ferai à ce théorème le même reproche que j'ai adressé à celui où l'auteur veut démontrer que les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons. Ici encore il se fonde sur cette proposition : *Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe AMB est plus longue que la ligne enveloppée AMB*, proposition qu'il n'a point vraiment démontrée, et qui, par elle-même, est vicieuse, ainsi que je l'ai déjà dit.

Même en écartant ce reproche, et en supposant logique l'argumentation de Legendre, elle ne prouverait pas plus que celle de Lacroix; elle forcerait seulement à reconnaître que, s'il pouvait y avoir un rapport de quantité entre la surface d'un cercle et un rectangle, l'aire du cercle serait égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.

Legendre emploie un raisonnement qui est analogue à celui que je viens de critiquer, et qui pèche au même point de vue, pour montrer que la surface de la sphère est égale à son diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle. Je rejette encore cette démonstration en ce qu'elle autoriserait seulement à dire que si la surface de la sphère pouvait être en rapport de quantité avec une surface plane, et que la circonférence d'un grand cercle pût être en rapport de quantité avec une ligne droite, la surface de la sphère devrait égaler le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.

« Tout secteur sphérique a pour mesure la zone « qui lui sert de base multipliée par le tiers du « rayon, et la sphère entière a pour mesure sa sur- « face multipliée par le tiers du rayon. »

C'est là un théorème inadmissible, comme les précédents, et que Legendre prétend démontrer. Je juge inutile de reproduire ici son raisonnement, qui est d'ailleurs analogue à celui dont je viens de parler, et est vicieux comme fondé aussi sur une proposition inadmissible et qu'il n'a point démontrée. J'accorde seulement que, si un rapport de quantité pouvait exister entre la solidité d'un secteur sphérique, ou d'une sphère, et celle d'un polyèdre, l'objet de ce théorème serait vrai, devrait être rationnellement admis.

Lacroix, pour démontrer les propositions relatives à l'aire de la surface de la sphère, et à la solidité ou volume de la sphère, emploie le procédé qu'il a appliqué au théorème concernant l'aire du cercle. Son raisonnement est logique, mais se fonde sur la donnée fausse d'un rapport de quantité entre des courbes et des droites, entre des surfaces courbes et des surfaces planes.

Il faut rejeter pareillement tout ce que l'auteur dit sur la proportionnalité des circonférences et des aires de cercles considérés dans un cône, avec les lignes du triangle générateur; sur l'aire des cônes ou portions de cônes, ou sur leur volume; sur l'aire ou le volume de la calotte sphérique; sur la comparaison des corps ronds, c'est-à-dire sur la proportionnalité des côtés, hauteurs, circonférences, aires et volumes des cônes, cylindres et sphères.

La même critique s'adresse aux propositions analogues traitées par Legendre.

Des géomètres ont cru démontrer que la mesure d'un cercle est égale au produit de la circonférence multipliée par la moitié du rayon, et que le volume de la sphère est égal au produit de la surface multipliée par le tiers du rayon, en considérant la circonférence d'un cercle comme la réunion d'une infinité de lignes droites extrêmement ténues, et la surface de la sphère comme un assemblage de triangles plans rectilignes extrêmement petits. De là, en effet, ils concluaient que le cercle est un composé d'une infinité de petits triangles ayant leur sommet au centre et leur base à la circonférence, et que la sphère est la réunion d'une infinité de petites pyramides triangulaires dont la base est la surface et le sommet au centre de la sphère.

Mais ces conceptions sont directement contraires à l'idée d'un cercle et d'une sphère, qui ne sauraient offrir, à la circonférence, à la surface, des droites ou des plans, quelque petits qu'on supposât ces plans et ces droites.

Je ne crois pas utile de parler de tous les procédés qui, au sujet de ces matières, ont pu être employés par les géomètres. Ma critique de ceux que j'ai cités suffit pour faire sentir l'inanité des autres. Toutes les spéculations de cette sorte pèchent au moins en ce qu'elles blessent le principe d'homogénéité.

Dans une géométrie rationnelle, toutes ces propositions, tous ces théorèmes qui supposent des rapports impossibles, devront disparaître. On se bornera, du moins dans la partie purement théorique, aux propositions concernant les polygones ou polyèdres inscrits ou circonscrits aux cercles, cônes, cylindres, sphères, etc. On montrera les rapports existants entre ces divers polygones ou polyèdres; on fera voir que leurs aires, leurs volumes peuvent s'approcher de plus en plus, autant qu'on le veut, des aires ou volumes des cercles, cônes, cylindres, sphères, etc., inscrits ou circonscrits. Et cela suffira, même pour la pratique, en général, puisque l'on ne parvient pas et l'on ne saurait parvenir, pratiquement, à la détermination de ces chimériques rapports qu'on admet entre des grandeurs hétérogènes.

Cependant il serait bon, je pense, de présenter aussi, mais séparément, les raisonnements que j'ai critiqués, à la condition de ne leur donner que la vraie portée rationnelle qu'ils peuvent avoir, et de modifier en ce sens l'énoncé des théorèmes. Ainsi, au lieu de cette proposition : *Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons*, on substituera la suivante : *S'il pouvait y avoir un rapport de quantité entre des lignes courbes différentes, les circonférences des cercles seraient entre elles comme les rayons*. Les autres théorèmes relatifs aux circonférences, aux cercles, aux sphères, etc., seraient modifiés dans le même sens. Ainsi présentés, ils n'auraient rien de contraire à la raison, et ils pourraient n'être pas inutiles dans la pratique; car, parfois, on a à résoudre pratiquement des problèmes qui supposent un ou plusieurs des rapports impossibles dont il s'agit.

Je suppose, par exemple, qu'il s'agisse de résoudre ce problème : *Entre tous les cônes inscrits* *dans une sphère, déterminer celui qui a une plus grande surface convexe.*

Ce problème ne se résout pas rationnellement, puisqu'il n'y a pas de rapport de quantité entre des courbes et des droites; mais au point de vue pratique, on peut le résoudre d'une manière satisfaisante en admettant hypothétiquement les rapports qu'il indique, et en les déterminant suivant des théorèmes qui ont été l'objet de ma critique.

Il conviendrait de placer ces sortes de propositions dans un chapitre particulier, qu'on pourrait intituler : *Théorèmes hypothétiques, ou fondés sur des hypothèses admises dans la pratique, mais non rationnelles*. On commencerait par affirmer qu'il n'existe aucun rapport de quantité entre des courbes et des droites, ni entre des courbes différentes; mais que ces propositions sont utiles à la pratique, et que c'est par ce motif qu'on a cru devoir les présenter.

On maintiendra, dans la partie vraiment théorique, les théorèmes où l'on démontre des rapports entre les côtés d'un triangle sphérique, et ceux où l'on démontre des rapports entre des surfaces considérées sur une même sphère; là, en effet, le principe d'homogénéité est respecté. Ainsi, par exemple, on conservera dans la théorie pure cette proposition : *La surface d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits.*

On a cru pouvoir déterminer exactement la quadrature de l'ellipse par le procédé suivant. On a dit :

« Si le grand axe de l'ellipse est pris pour dia-« mètre d'un cercle, et qu'on nomme y' et y'' deux « coordonnées appartenant à la même abscisse, « l'une dans l'ellipse et l'autre dans le cercle, on a

$$y' = \frac{b}{a} y''$$

« Cette relation entre les coordonnées de deux « courbes peut servir à faire trouver la surface de « l'ellipse. Pour cet effet, partageons (fig. 13) l'axe « des abscisses en parties égales AP, PP′, P′P″, etc., « et nommons n l'une de ces parties; par les points « de division P, P′, P″, etc., élevons des perpen-« diculaires, et par les points où ces perpendicu-« laires rencontrent les deux courbes, menons des « lignes droites qui formeront deux polygones in-« scrits, l'un à l'ellipse et l'autre au cercle.

« Soient $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$, etc., « nous aurons, d'après la relation ci-dessus,

$$NP = \frac{b}{a} y, \; N'P' = \frac{b}{a} y', \; N''P'' = \frac{b}{a} y'', \text{ etc.}$$

« Et comme, par hypothèse, $AP = PP' = P'P''$, « etc., $= n$, on trouvera facilement que le trapèze « $PP'NN'$ a pour expression :

$$\tfrac{1}{2}(PN + P'N')\,PP' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}y + \frac{b}{a}y'\right)n = \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}(y + y')n,$$

« et comme, d'une autre part, le trapèze $PP'MM'$ a « pour expression :

$$\tfrac{1}{2}(PM + P'M')\,PP' = \tfrac{1}{2}(y + y')\,n,$$

« le rapport des deux surfaces sera donc exprimé « par $\frac{b}{a}$. On prouverait de même que tout autre tra- « pèze inscrit dans l'ellipse est à son trapèze corres- « pondant inscrit dans le cercle, dans le même rap- « port, qui sera aussi celui des triangles APN et « APM, et des triangles $BP'''N'''$ et $BP'''M'''$.

« Donc, puisque dans une suite de rapports « égaux, la somme des antécédents est à celle des « conséquents, comme un antécédent est à son « conséquent, on aura la somme des trapèzes in- « scrits dans l'ellipse, et des triangles APN et « $BP'''N'''$, est à celle des trapèzes inscrits dans « le cercle, et des triangles APM et $BP'''M'''$ dans « le rapport de b à a. Cette propriété étant indé- « pendante du nombre des côtés de ces polygones

« appartiendra aussi à l'ellipse et au cercle qui sont « les limites des surfaces de ces polygones, donc

$$\text{Surface de l'ellipse} = \frac{b}{a}\,\text{surface du cercle.}$$

« $1 : \pi$ étant le rapport du diamètre à la cir- « conférence, la surface du cercle qui a a pour « rayon est πa^2; substituant cette valeur, la sur- « face de l'ellipse sera exprimée par $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$. »

Ce raisonnement n'est pas acceptable. Il montre bien que tout trapèze inscrit dans l'ellipse est à son trapèze correspondant inscrit dans le cercle dans le rapport de $\frac{b}{a}$ qui sera aussi celui des triangles APN et APM, et des triangles BP'''N''' et BP'''M'''; qu'ainsi la somme des trapèzes inscrits dans l'ellipse et des triangles APN et BP'''N''' est à celle des trapèzes inscrits dans le cercle, et des triangles APM et BP'''M''', dans le rapport de b à a; mais il ne s'ensuit pas que ce même rapport existera entre l'ellipse et le cercle. On se fonde, pour cette conclusion, sur ce que le rapport de b à a démontré entre les trapèzes et triangles en question est indépendant du nombre des côtés de ces polygones inscrits dans le cercle et dans l'ellipse, et sur ce que le cercle et l'ellipse sont les limites des surfaces de ces mêmes polygones; mais ceci ne montre point qu'il y ait entre l'ellipse et le cercle exactement le même rapport qu'il y a entre les polygones ou triangles inscrits ou conçus en eux; qu'il y ait un rapport réel, exact, mathématique entre l'ellipse et le cercle. Un tel rapport est impossible; une courbe, un arc est la limite du contour polygonal inscrit, soit; mais qu'importe? l'un n'est pas l'autre; ce qui peut se dire de l'un ne peut ici s'appliquer à l'autre, à cause de la différence essentielle existant entre eux.

Ayant trouvé, ainsi que je viens de le dire, pour la surface de l'ellipse, l'expression πab, on a dit : « Soit m une moyenne proportionnelle entre a et b ; « le cercle décrit avec m pour rayon sera égal à l'el- « lipse, car ce cercle a pour surface πm^2, et comme « $m^2 = ab$, on a $\pi m^2 = \pi ab$. »

Cette égalité est impossible.

On a appliqué des procédés analogues, à la détermination de la quadrature de l'hyberbole et de la parabole; mais une critique semblable à celle que je viens de présenter au sujet de l'ellipse montrerait que ces spéculations sont irrationnelles, à cause de la différence essentielle existant entre les lignes et les surfaces des diverses figures qui y sont comparées.

Je m'occuperai ailleurs de ce qu'on appelle la rectification, de ces courbes, c'est-à-dire de la détermination en ligne droite de leur longueur. On a aussi prétendu déterminer en ligne droite la longueur d'un très-grand nombre d'autres courbes, et mesurer les espaces compris par ces mêmes courbes ou par leur révolution autour de leur axe. Je ne discuterai ces spéculations également inadmissibles, au point de vue théorique, qu'après avoir traité de quelques procédés de calcul qui leur ont été appliqués, notamment de la méthode des indivisibles, du calcul différentiel et du calcul intégral.

Avant d'aborder cette haute partie de la science, je m'occuperai des diverses théories qui ont été émises sur les parallèles, et de quelques autres questions.

CHAPITRE VI

DES DIVERSES THÉORIES DES PARALLÈLES.

La question des parallèles est une des parties de la géométrie qui ont soulevé le plus de discussions et de controverses. Pour moi, je pense que l'on a généralement attaché beaucoup trop d'importance à l'objet de ce grand débat.

Les disputes suscitées par la théorie des parallèles sont nées surtout de la répugnance de bon nombre de géomètres à reconnaître des axiomes rationnels ou du moins à en admettre quelques-uns en dehors de ceux qui sont en circulation et, par leur vulgarité même, ont acquis, pour ainsi dire, force de chose jugée.

Quoi qu'il en soit, bien des lances ont été rompues dans cette sorte de joute scientifique. Il s'est produit une lutte d'arguments subtils, un combat à outrance, entre ce qu'on peut appeler les rationalistes et les sensualistes ou empiriques de la géométrie. Dans la mêlée, bien des sophismes se sont entre-choqués, bien des théories se sont brisées dans le choc.

Je vais reproduire ici les noms des principaux géomètres qui sont entrés en lice, les doctrines les plus saillantes qui ont été lancées dans cette lutte, et émettre un jugement sur ces doctrines.

Loin de s'accorder sur le fond de la question, on ne s'est même pas entendu sur la définition des parallèles.

Plusieurs géomètres, et entre autres Wolfius, Bonicastle, Thomas Simpson, dans la première édition de ses *Éléments*, ont défini les parallèles *deux droites qui conservent toujours la même distance de l'une à l'autre.*

Dalembert définit la parallèle, *une ligne qui a deux de ses points également éloignés d'une autre ligne.*

Plusieurs autres, notamment Bezout et Varignon, ont proposé de définir les parallèles, *deux lignes droites également inclinées à l'égard d'une troisième.*

Plus généralement, on les a définies, *deux droites tracées sur un même plan et qui ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'elles soient prolongées* : c'est, du moins en substance, la définition d'Euclide et celle de Lemonnier, Legendre, Lacroix et bien d'autres.

Ces définitions ont été contestées par divers motifs. On a reproché à plusieurs géomètres de définir les parallèles sans démontrer la possibilité de ce qui, suivant eux, constitue le parallélisme. Ainsi, on a dit aux uns : Prouvez que des droites peuvent conserver toujours entre elles la même distance ; à d'autres : Démontrez qu'une ligne peut avoir deux de ses points également éloignés d'une autre ligne ; ou bien encore : Démontrez que deux lignes droites peuvent être également inclinées à l'égard d'une troisième ; ou enfin : Prouvez que deux droites peuvent être tellement placées que leur rencontre soit impossible, quel que soit leur prolongement : jusque-là nous repousserons votre définition.

C'est là une injuste objection. Si l'on conteste, par exemple, cette définition qui fait consister le parallélisme dans l'équidistance des lignes dites parallèles, parce que la possibilité de cette équidistance n'est pas prouvée, on peut tout aussi bien contester la définition du carré ou celle du triangle. Notre idée d'équidistance de deux lignes est aussi nette, aussi claire, que celle de ces figures. L'auteur de la *Géométrie sans axiomes*, M. Thompson, qui renie la définition dont il s'agit, en alléguant qu'il n'y a aucune évidence que les droites, dans une position donnée, conserveront toujours la même distance de l'une à l'autre, nous dit, dans ce livre, sous le titre de *Nomenclature*, ce qu'il entend par *équidistance* de deux points A et B avec deux autres points C et D : elle a lieu, dit-il, *quand A et C étant* *appliqués l'un sur l'autre, B et D pourraient aussi être appliqués l'un sur l'autre en même temps.*

Est-il plus évident que quatre points peuvent être disposés de manière à coïncider, deux par deux, comme il le suppose, qu'il ne l'est que des droites peuvent être continûment à égale distance l'une de l'autre? Non.

J'ai dit plus haut que le *postulatum* d'Euclide sur les parallèles n'est pas évident par lui-même, n'est pas une vérité immédiatement aperçue. Il ne peut donc servir de premier principe à la théorie des parallèles. Inutile de dire qu'on a contesté sa légitimité comme axiome.

L'astronome Ptolémée avança, dans son traité des parallèles, que si une droite coupe deux parallèles, les deux angles intérieurs de chaque côté vaudront ensemble deux angles droits. Voici comment il raisonne pour le démontrer : « Si les angles « intérieurs d'un même côté valaient ensemble plus « de deux angles droits, il faudrait que les deux « angles intérieurs de l'autre côté valussent pareil- « lement plus de deux angles droits, et la totalité « plus de quatre, ce qui est impossible; car ces « lignes ne sont pas plus parallèles d'un côté que « de l'autre. Il en serait de même si les angles inté- « rieurs étaient supposés moindres que deux angles « droits. »

A ce sujet, M. Thompson affirme qu'*il n'y a ni preuve ni apparence de probabilité que le parallélisme dépende de l'égalité de la somme des angles d'un côté à celle des angles d'un autre côté; et il ne voit pas d'impossibilité à ce que les angles vaillent plus d'un côté que de l'autre.*

Pour moi, interprétant et développant la pensée de Ptolémée, je dis qu'il est évident que deux droites parallèles coupées par une droite offrent de chaque côté de cette droite et relativement à cette droite une même disposition symétrique, d'où il résulte que les deux angles intérieurs formés d'un côté sont égaux aux deux angles intérieurs formés de l'autre côté chacun à chacun. Ici les angles intérieurs évidemment égaux entre eux sont ceux qu'on appelle *alternes-internes.* Puisque, d'ailleurs, on démontre que les quatre angles dont il s'agit valent en somme quatre angles droits, les deux angles intérieurs de chaque côté valent ensemble deux angles droits.

Le père Clavius affirme avec raison qu'une ligne droite dont chaque point est équidistant d'une droite située dans le même plan est aussi une ligne droite; seulement, il veut motiver, démontrer cette vérité évidente par elle-même, et il n'est pas heureux dans cette tentative. — Il est encore bien évident que si une perpendiculaire déterminée se meut le long d'une ligne droite, son extrémité décrira une ligne droite, et que ces droites seront continûment équidistantes; il est visible qu'étant continûment équidistants, elles ne pourront se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

On a constaté l'évidence de ces vérités.

Thomas Simpson, dans la seconde édition de ses *Éléments de géométrie*, proposa pour axiome que *si deux points d'une ligne droite sont à inégale distance d'une autre droite, dans le même plan, ces deux lignes étant prolongées indéfiniment du côté de la plus petite distance, se rencontreront mutuellement.*— Robert Simpson proposa un axiome analogue. Ce sont là, en effet, des vérités rationnelles intuitives, et directement intuitives, qui pourtant ont été énergiquement contestées comme telles.

Le docteur Playfair, après Ludlam et plusieurs autres, a proposé cet axiome : *Deux droites qui se coupent mutuellement ne peuvent être toutes les deux parallèles à une même droite.* — La critique a nié l'évidence de cette proposition immédiatement manifeste aux yeux de la raison.

Le même auteur Playfair a aussi proposé une démonstration se rattachant aux parallèles, et dont l'objet est de prouver que, *si les côtés d'un triangle rectiligne sont prolongés dans le même sens, les angles extérieurs vaudront ensemble quatre angles droits.* L'auteur base son raisonnement sur ce qu'une ligne droite qui parcourt le périmètre d'un triangle, en s'appliquant successivement à chacun des côtés, revient encore à son ancienne situation. — Cette démonstration ne me paraît point satisfaisante. La critique qu'en fait M. Thompson est généralement fondée.

Franceschini, dans son essai sur la théorie des parallèles, a tâché de fournir une preuve qui pût servir de fondement à cette théorie. Suivant lui, *si deux lignes droites font avec une troisième les angles intérieurs du même côté, l'un droit, l'autre aigu, les perpendiculaires abaissées sur la troisième ligne, des différents points de celle qui fait l'angle aigu, couperont nécessairement des parties de plus en plus grandes de la ligne sur laquelle elles tombent;* d'où il conclut que toutes les parties ainsi coupées devront croître jusqu'à ce qu'elles atteignent l'autre droite, et que par conséquent les deux droites qui font avec une troisième les angles intérieurs du même côté, l'un droit, l'autre aigu, devront nécessairement se rencontrer, étant suffisamment prolongées.

Cette démonstration n'est pas complète, en ce qu'on peut objecter qu'il est des cas où des parties croissent de plus en plus sans jamais atteindre telle limite. Telle est le cas de l'hyberbole et de ses asymptotes. Si on suppose, abaissée du sommet de l'hyberbole, une droite A perpendiculaire à l'une de ses asymptotes, on conçoit qu'on pourra indéfiniment abaisser de la courbe sur cette perpendiculaire A, des lignes parallèles à l'asymptote, qui couperont des parties de plus en plus grandes de la ligne A sans jamais atteindre l'asymptote. Il est vrai que l'accroissement successif des parties coupées par les perpendiculaires ne sera pas toujours égal, ne pourra être indéfiniment d'une même quantité ; les parties ajoutées devront nécessairement arriver à une diminution progressive. Or, Franceschini, dans son théorème, ne suppose pas une diminution analogue ; mais, pour compléter sa preuve, il fallait qu'il démontrât ou qu'il pût poser comme axiome rationnel (ce qu'il pouvait faire) que, dans l'espèce, les parties interceptées sur la troisième ligne par les perpendiculaires, sont proportionnelles aux parties interceptées, sur la ligne oblique à celle-ci, par ces mêmes perpendiculaires ; qu'ainsi on peut toujours prendre sur la ligne oblique une partie assez grande pour que la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette partie se confonde avec l'autre droite.

Legendre est un des géomètres qui ont le plus médité sur la question des parallèles ; mais il a médiocrement réussi.

Il a varié, notamment, au sujet de ce théorème :

Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisième EF, deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, les lignes AB, CD, prolongées suffisamment, devront se rencontrer.

Après avoir présenté, dans ses premières éditions, dans la septième notamment, des raisonnements à l'appui de ce théorème, il les retira dans la neuvième édition.

La onzième édition offrit, dans une note, une nouvelle argumentation pour démontrer cette proposition fondamentale que, *dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.* Cette spéculation de Legendre a une assez grande importance, en ce que n'étant pas fondée sur la théorie des parallèles, elle pourrait en être au contraire la base, dans le système adopté par Legendre et par beaucoup de géomètres. Elle servirait à démontrer le fameux *postulatum* d'Euclide. Aussi devint-elle aussitôt l'objet de l'attention et de la critique. Contestée, attaquée par de savants mathématiciens, surtout par M. Leslie, professeur célèbre d'Édimbourg, dans ses Éléments de géométrie, elle a été défendue, énergiquement soutenue par d'autres géométres très-recommandables.

Dans cette discussion intéressante, la raison ne me paraît point être du côté de Legendre et de ses défenseurs. La critique de M. Leslie est fondée dans ses points essentiels.

Voici le théorème en question :

« On démontre immédiatement, dit Legendre, « par la superposition, et sans aucune proposition « préliminaire, que *deux triangles sont égaux*, « *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles* « *égaux chacun à chacun*. Appelons p le côté dont il « s'agit, A et B les deux angles adjacents, C le troi- « sième angle. Il faut donc que l'angle C soit entiè- « rement déterminé, lorsqu'on connaît les angles A « et B, avec le côté p; car si plusieurs angles C « pouvaient correspondre aux trois données A, B, p, « il y aurait autant de triangles différents qui au- « raient un côté égal adjacent à deux angles égaux, « ce qui est impossible : donc l'angle C doit être une « fonction déterminée des trois quantités A, B, p; « ce que j'exprime ainsi : $C = \varphi : (A, B, p)$.

« Soit l'angle droit égal à l'unité, alors les angles « A, B, C, seront des nombres compris entre 0 et « 2; et puisque $C = \varphi : (A, B, p,)$, je dis que la « ligne p ne doit point entrer dans la fonction φ. En « effet, on a vu que C doit être entièrement déter- « miné par les seules données A, B, p, sans autre « angle ni ligne quelconque; mais la ligne p est hé- « térogène avec les nombres A, B, C; et si on avait

« une équation quelconque entre A, B, C, p, on en « pourrait tirer la valeur de p en A, B, C, d'où il « résulterait que p est égal à un nombre, ce qui est « absurde ; donc p ne peut entrer dans la fonction « Q, et on a simplement $C = \varphi : (A, B)$.

« Cette formule prouve déjà que si deux angles « d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre « triangle, le troisième doit être égal au troisième ; « et cela posé, il est facile de parvenir au théorème « que nous avons en vue.

« Soit d'abord ABC (fig. 14), un triangle rec- « tangle en A ; du point A abaissez AD sur l'hypo- « ténuse, les angles B et D du triangle ABD sont « égaux aux angles B et A du triangle BAC ; donc « suivant ce qu'on vient de démontrer, le troisième « BAD est égal au troisième C. Par la même raison, « l'angle $DAC = B$, donc $BAD + DAC$ ou BAC « $= B + C$: or l'angle BAC est droit ; donc *les* « *deux angles aigus d'un triangle rectangle, pris* « *ensemble, valent un angle droit.*

« Soit ensuite BAC (fig. 15) un triangle quel- « conque et BC un côté qui ne soit pas moindre que « chacun des deux autres : si de l'angle opposé A « on abaisse la perpendiculaire AD sur BC, cette « perpendiculaire tombera au dedans du triangle « ABC, et le partagera en deux triangles rectangles « BAD, DAC : or, dans le triangle rectangle BAD,

« les deux angles BAD, ABD, valent ensemble un « angle droit; dans le triangle rectangle DAC, les « deux angles DAC, ACD, valent aussi un angle « droit. Donc les quatre réunis valent ensemble deux « angles droits : donc, *dans tout triangle la somme « des trois angles est égale à deux angles droits.* »

Cette doctrine n'est pas admissible, je la rejette par les considérations suivantes, qui la renversent ainsi que les allégations qui ont été produites pour la défendre, et dont je rapporterai les plus essentielles. Aux raisons principales qui ont été présentées contre le théorème en question, je joindrai quelques considérations qui me sont particulières.

Reprenons le principal raisonnement de Legendre : « C, dit-il, doit être entièrement déterminé « par les seules données A, B, p, sans autre angle « ni ligne quelconque, mais la ligne p est hétérogène « avec les nombres A, B, C; et si on avait une équa- « tion quelconque entre A, B, C, p, on en pourrait « tirer la valeur de p en A, B, C; d'où il résulterait « que p est égal à un nombre, ce qui est absurde; « donc p ne peut entrer dans la fonction φ, et on a « simplement $C = \varphi : (A, B)$.

Ce raisonnement est sophistique. Pourquoi une quantité ne pourrait-elle être en raison d'une autre quantité hétérogène, être déterminée par cette dernière quantité, en ce sens qu'elles seraient liées l'une à l'autre, que l'existence de l'une entraînerait l'existence de l'autre?

Plusieurs exemples peuvent montrer la possibilité d'une telle liaison, d'un rapport de cette nature.

Ainsi, une circonférence est en raison du rayon, et réciproquement le rayon est en raison de la circonférence, dans le sens dont je viens de parler. La courbure de la circonférence est liée à la longueur du rayon, et cependant la circonférence est une sorte de quantité qui n'est pas homogène avec le rayon : je l'ai dit, une courbe diffère essentiellement d'une droite; il n'existe réellement entre elles aucun rapport possible de quantité.

Un angle est déterminé par l'arc compris entre ses côtés et supposé décrit avec un rayon quelconque du sommet de cet angle. Tel arc est lié à tel angle ainsi compris, à l'angle qu'il sous-tend au centre. Pourtant il y a hétérogénéité entre l'arc et l'angle.

On objectera que ce n'est pas seulement par l'arc compris entre ses côtés qu'est déterminé l'angle, mais par l'arc divisé par le rayon, par le rapport de l'arc au rayon exprimé ainsi algébriquement : $\frac{arc}{\mathrm{R}}$, rapport abstrait qui est un nombre pouvant figurer dans une équation avec d'autres nombres abstraits; que, par conséquent, il y a ici homogénéité.

Je rejette cette objection. Si l'on pense qu'un angle est déterminé par l'arc qu'il sous-tend, *divisé par le rayon*, c'est que l'on considère l'arc comme égalant, sous la forme d'une courbe, une certaine longueur en ligne droite, et que d'un autre côté on juge que les longueurs des arcs décrits du sommet de l'angle avec des rayons différents, et compris entre les côtés de l'angle, sont entre elles comme ces rayons. Mais tout cela est irrationnel, impossible. Il n'est aucun rapport de longueur entre des courbes et des droites. Me plaçant à ce point de vue, je maintiens qu'un angle est déterminé par l'arc seul compris entre ses côtés et décrit du sommet de l'angle avec un rayon quelconque. Si pour apprécier la longueur d'un arc et la mesure d'un angle, on veut concevoir une circonférence comme divisée en un certain nombre de parties égales, on devra rationnellement concevoir ces parties comme autant de lignes courbes de même courbure, et l'angle sera déterminé par la quantité plus ou moins grande de lignes courbes qu'il sous-tendra relativement à la totalité de la circonférence considérée.

Dans la question soulevée par Legendre, il ne s'agit pas, il ne doit pas s'agir de savoir si telle quantité peut être déterminée *numériquement*, au moyen de certains éléments hétérogènes figurant dans une équation, de savoir si l'on peut obtenir entre A, B, C, p, une équation dont on tirerait la valeur de p. — Qu'une telle détermination soit ou ne soit pas admissible, il est incontestable que certains élements hétérogènes peuvent dépendre les uns des autres, être tels que l'existence de l'un, dans tel cas, entraîne l'existence de l'autre ou des autres; et cela suffit pour que le principe d'homogénéité invoqué par Legendre ne soit pas recevable dans la question; car *à priori*, ce géomètre n'a pu affirmer qu'il doit y avoir, dans l'espèce, possibilité d'une détermination en nombre avec les éléments donnés, avec ces seuls éléments. Pour que sa démonstration fût fondée, il faudrait que de l'hétérogénéité des quantités comparées il résultât l'impossibilité, pour les angles, d'être en raison nécessaire de tel côté, d'être liés dans leur existence à une autre sorte de quantité, à une quantité hétérogène p; or le principe d'homogénéité ne recèle point en lui une semblable conséquence.

Legendre paraît avoir confondu ici ces deux sortes de déterminations bien distinctes; ou du moins il a méconnu l'importance qu'il y avait à les distinguer.

A-t-on raison d'opposer à son théorème la relation $p = \varphi : (a, b, A)$? Peut-on objecter que, si l'on procédait comme ce géomètre procède à l'égard de la relation $A = \varphi : (B, C, p)$, on devrait éliminer

A et poser seulement $p = \varphi : (a, b)$, relation inadmissible?

Il est certain qu'un angle considéré en soi, à part la question de détermination en nombre, est hétérogène aux côtés d'un triangle; que pourtant un côté est déterminé par un angle et les deux côtés que comprend cet angle. A ce point de vue, les deux procédés se trouvent en contradiction.

Maintenant, s'il est question d'une détermination numérique, exprimée dans une équation entre $p = \varphi : (a, b, A)$, peut-on justifier Legendre du reproche de contradiction qui lui a été adressé? Non encore.

Du côté de Legendre, on dit, du moins en substance :

« L'angle A exprime un rapport abstrait entre
« certaines quantités. Qu'est-ce qu'on entend par un
« angle de tel nombre de degrés, de minutes, de
« secondes? On entend un angle mesuré par un cer-
« tain nombre de parties considérées sur une cir-
« conférence, rapportées à une circonférence. Ainsi,
« la circonférence étant divisée en 400 parties appe-
« lées degrés, si l'on dit, en ce cas, que l'angle A
« est de trois degrés, on entendra que ses côtés
« interceptent sur la circonférence trois parties
« faisant chacune la quatre-centième partie de cette
« circonférence. On pourra donc représenter cet

« angle A par la fraction $\frac{8}{400}$, nombre abstrait.

« Si l'on prend pour unité angulaire l'angle droit, « qu'on peut ainsi représenter par 1, alors les angles « A, B, C, sont des nombres abstraits compris entre « 0 et 2.

« D'un autre côté, supposons tel rapport entre « telles lignes p, b, c; supposons, par exemple, ce « rapport $\frac{b \times c}{p}$. Ces lignes ainsi envisagées for- « ment un rapport qui sera constant, quelle que soit « la division qu'on fasse de ces mêmes lignes, pourvu « qu'on leur applique une commune mesure.

« A ces points de vue, on peut donc dire que « l'angle A est un nombre abstrait pouvant figurer « avec un rapport qui serait établi entre les lignes « p, a, b, de la relation $p = \varphi : (a, b, A)$. Ainsi, « au point de vue de l'homogénéité, il n'est pas ab- « surde de supposer possible une équation réelle « entre p, a, b, A. »

Mais à ces considérations, on objecte avec raison que la relation établie entre un angle et le cercle, ou entre un angle et l'angle droit pris pour unité, est tout arbitraire; que l'on pourrait, prenant tel autre angle que l'angle droit pour unité de mesure, évaluer les grandeurs angulaires par rapport à cette mesure, sans la rapporter à la circonférence ou au cercle. On ajoute que la ligne p qui figure dans la relation $A = \varphi : (B, C, p)$, pourrait y être maintenue par une considération semblable à celle dont il s'agit : tel serait le cas où, par la ligne p, on entendrait positivement exprimer une certaine quantité de parties égales à celle qu'on envisagerait dans une autre ligne divisée en tel nombre déterminé de ces mêmes parties. En ce cas la ligne p, représentée par un nombre abstrait, serait susceptible d'entrer dans une équation où figureraient aussi les angles A, B, C, de même que l'angle A, comme rapport, comme nombre abstrait, est susceptible d'entrer dans une équation où se trouveraient les côtés p, b, c, considérés dans un certain rapport abstrait entre eux.

Cette objection est fondée. La contradiction reprochée à Legendre est donc réelle.

Au reste, la relation symbolique $p = \varphi : (a, b, A)$ doit être maintenue dans son intégrité, car il est vrai que le côté p d'un triangle est déterminé par les deux autres côtés et l'angle compris entre eux, en ce sens que tel angle et tels côtés qui le comprennent entraînent nécessairement tel autre côté pour le triangle. L'on peut dire que ceci est confirmé par la relation trigonométrique

$$\text{Cos C} = \frac{1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}}{2\,\frac{b}{a}}$$

En effet on y voit que le cosinus de l'angle C est égal à une certaine fonction des rapports des côtés du triangle ; or, l'angle C étant déterminé par son cosinus, en ce sens que sa grandeur est liée à celle de son cosinus, il s'ensuit que l'angle C lui-même est lié à une certaine fonction des rapports des côtés ; d'où on peut induire qu'un côté quelconque est lié non-seulement aux autres côtés, mais encore à l'angle C.

Le principal défenseur du théorème de Legendre a cru apporter, *à posteriori*, une preuve mathématique invincible que la droite p doit être éliminée dans la relation $C = \varphi : (A, B, p)$, en raisonnant ainsi :

« S'il s'agit d'un triangle sphérique, nous avons « vu que l'équation symbolique devient $C = \varphi :$ « $\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$ et qu'on ne peut plus raisonner comme « dans le cas du triangle rectiligne, puisque $\frac{c}{r}$ est « un véritable nombre. Mais si r devient infini, c'est-« à-dire si la sphère devient un plan, ce qui change « le triangle de *sphérique* en *rectiligne*, alors il est « évident que les angles déterminés C, A, B, étant « des multiples ou sous-multiples *finis* de l'unité « angulaire, qui est elle-même un rapport fini avec « la quantité angulaire totale, ne peuvent être com-

« parés avec la quantité $\frac{c}{\infty}$ et cela quelle que soit « la grandeur de c; en sorte que l'on voit clairement « par là que la grandeur de l'angle C ne peut être « affectée par celle du côté c et que la relation pro- « posée doit se réduire alors nécessairement à « l'équation rigoureuse $C = \varphi : (A, B)$.

Une pareille argumentation est inexacte, complétement inadmissible. D'abord $\frac{c}{r}$ ne peut être un rapport, à cause de l'hétérogénéité existante entre c et r. De plus il ne peut y avoir un rayon infini; la sphère implique que le rayon est limité à la circonférence, à la surface sphérique. Une circonférence est ou n'est pas; il y a contradiction à supposer que la circonférence, au moyen de l'infinité du rayon, est une ligne droite, que la surface de la sphère devient ainsi un plan. Pourquoi s'abandonner à d'aussi monstrueuses spéculations? il serait bien désirable qu'on purgeât les mathématiques de toutes ces anomalies, de toutes ces hypothèses impossibles qu'on a jetées dans cette science, qui pourrait être complétement exacte.

Je conclus que la démonstration de Legendre est erronée, inacceptable; avec elle tombent toutes les conséquences, toutes les solutions que, dans sa note, l'auteur en a fait découler.

Ainsi croule la base que Legendre crut alors donner à la théorie des parallèles. Ainsi s'évanouissent d'autres démonstrations importantes qu'il a cru pouvoir déduire immédiatement du même ordre de considérations sur les fonctions.

Dans la note II de la 12e édition, Legendre reproduit le théorème dont je viens de m'occuper, et de plus il revient sur une ancienne démonstration qu'il avait donnée dans ses premières éditions. Il rappelle qu'il avait d'abord démontré que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits, proposition qui, dit-il, sépare tout d'un coup par une différence essentielle, les triangles rectilignes des triangles sphériques; il ajoute que cette première partie étant établie; il restait à prouver que la somme des angles ne peut être plus petite que deux angles droits : « Or, dit-il, « comme l'excès des trois angles sur deux angles « droits, qui a lieu dans les triangles spériques, est « proportionnel à l'aire du triangle; de même le *dé-* « *ficit*, s'il y en avait un dans les triangles rectili- « gnes, serait proportionnel à l'aire du triangle. Dès « lors il est aisé de voir que si on réussit à construire, « d'après un triangle donné, un autre triangle dans « lequel le triangle donné soit contenu au moins *m* « fois, le déficit de ce nouveau triangle égalera au « moins *m* fois le *déficit* du triangle donné, de sorte

« que la somme des angles du grand triangle dimi-
« nuera progressivement à mesure que *m* augmente,
« jusqu'à devenir nulle ou négative ; résultat absurde
« et qui prouve que la somme des angles d'un
« triangle ne peut être moindre que deux droits. »

Cette spéculation pèche, elle n'est pas logique. De ce que, pour les triangles sphériques, où la somme des angles excède toujours *nécessairement* deux angles droits, *l'excès* est toujours proportionnel à l'aire du triangle, s'ensuit-il que, dans l'hypothèse où la somme des angles du triangle rectiligne POURRAIT être moindre que deux droits, le *déficit* devrait être proportionnel à l'aire de ce triangle rectiligne ? — Pourquoi cette conclusion ? La dernière hypothèse, celle concernant le triangle rectiligne, est-elle diamétralement opposée au cas du triangle sphérique ? Non : pour le triangle sphérique, on affirme que la somme des angles excède toujours deux angles droits; dans l'hypothèse du triangle rectiligne, on suppose seulement la *possibilité,* non pas la *nécessité,* pour la somme de ses angles, d'être inférieure à deux angles droits : il n'y a donc pas là une opposition absolue, extrême ; pour qu'elle fût telle, il faudrait qu'on supposât que la somme des angles du triangle rectiligne fût nécessairement moindre que deux droits. Au reste, quand même on serait ici dans le cas d'une opposition absolue, cela n'autoriserait pas à conclure du cas d'un triangle sphérique à celui d'un triangle rectiligne.

Et puis la dernière assertion de l'auteur que, dans l'hypothèse de *déficits* proportionnels aux aires des triangles, la somme des angles du grand triangle diminuerait progressivement à mesure que *m* augmenterait, *jusqu'à devenir nulle ou négative,* n'est point exacte. La somme des angles du grand triangle ne pourrait s'annuler que dans l'hypothèse où, *m* devenant infini, le grand triangle serait infiniment grand; hypothèse qui n'est pas admissible. L'infini est repoussé par la raison; un triangle, d'ailleurs, implique des lignes qui le limitent.

A l'appui de cette démonstration, l'auteur est conduit à se poser ce théorème :

Soit (fig. 16) *BAC un angle donné, et M un point donné au dedans de cet angle; divisez l'angle BAC en deux également par la droite AD, et du point M menez MP perpendiculaire sur AD: je dis que la droite MP prolongée dans un sens et dans l'autre, rencontrera nécessairement les deux côtés de l'angle BAC.*

Et voici comme il raisonne pour démontrer cette proposition :

« Car, dit-il, si elle (la droite MP) rencontre un « des côtés de cet angle, elle rencontrera l'autre,

« tout étant égal des deux côtés à partir du point P ; « si elle ne rencontrait pas un côté, elle ne rencontrerait pas l'autre par la même raison ; ainsi, dans « ce dernier cas, elle devrait être renfermée tout « entière dans l'espace compris entre les côtés de « l'angle BAC ; or, il répugne à la nature de la ligne « droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, « puisse être renfermée dans un angle. »

Ici, l'auteur pour prouver cette dernière assertion, suppose un plan infini coupé par une droite : hypothèse que réprouve la raison. Elle rejette l'infini directement ; elle le rejette aussi au point de vue de ses conséquences. Ici, chaque moitié du plan infini devrait être aussi étendue que le plan total, et ainsi se trouverait démenti cet axiome : *Le tout est plus grand que sa partie.*

Enfin, dans le texte de cette même 12e édition, Legendre a introduit une autre démonstration pour prouver que la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits. (Proposition XIX, liv. Ier.)

Cette démonstration n'a point l'exactitude mathématique qu'on doit atteindre. L'auteur arrive péniblement, au moyen d'une certaine construction de triangles successifs, à un triangle $a'b'c'$ supposé tellement petit qu'il se réduirait presque au seul angle c', et qui aurait, pour expression de la somme de ses angles,

$$2\,D + a' + b' - x',$$

en désignant par D l'angle droit, et par x' l'angle extérieur $b'c'd'$.

Puis, concevant que le triangle $a'b'c'$ varie dans ses angles et ses côtés, de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de la même construction, et s'approchent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls, il juge que, dans cette limite, la droite $a'c'd'$ se confondant avec $a'b'$, les trois points a', c', b', finissent par être exactement en ligne droite; qu'alors les angles b' et x' deviennent nuls en même temps que a', et la quantité $2\,D + a' + b' - x'$, qui mesure la somme des trois angles du triangle $a'b'c'$, se réduit à $2\,D$; que, par conséquent, dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Or, il y a ici une irrationnalité palpable. Quand les trois points a', c', b', finissent par être exactement en ligne droite, le triangle $a'b'c'$ n'existe plus : on ne peut donc plus lui appliquer la formule $2\,D + a' + b' - x'$, même en la réduisant à $2\,D$. Ce ne sont pas seulement les angles a', b', x', qui disparaissent ; c'est encore l'angle c', c'est tout ce qui motivait l'expression $2\,D + a' + b' - x'$.

Ici il n'y a pas seulement réduction d'une formule par l'évanouissement d'une partie des termes qui y figurent, il y a évanouissement d'une formule entière.

L'équation

Somme des angles de $a'b'c' = 2\,D + a' + b' - x'$ devient, par l'annulation du triangle $a'b'c'$,

$$0 = 0.$$

Si, dans l'hypothèse de l'évanouissement de ce triangle, on supposait que le second terme de l'équation se réduit à 2 D, il s'ensuivrait qu'elle devrait être

$$0 = 2D,$$

expression absurde.

Le résultat du théorème de Legendre est juste, mais cela prouve seulement que des considérations fausses peuvent conduire à des propositions vraies. Et je m'explique très-bien qu'il en soit ainsi, en ce cas. En effet, sachant d'avance que les angles d'un triangle valent ensemble deux angles droits, je vois bien que l'expression $2\,D + a' + b' - x'$, trouvée pour la valeur totale de ces angles, doit se réduire, en réalité, à 2D, mais pourquoi? parce que les quantités $a' + b' - x'$ doivent se détruire, s'évanouir par la compensation, par la différence des signes. Maintenant, si l'on suppose qu'elles s'évanouissent par l'annulation de chacune d'elles, abstraction faite des signes, on arrivera aussi à n'avoir encore, pour la valeur cherchée, que 2 D; mais on y arrivera par une voie différente, et en se plaçant à un point de vue faux, ainsi que je l'ai expliqué.

Pour démontrer que les angles d'un triangle valent ensemble deux angles droits, il vaut beaucoup mieux s'en tenir à la démonstration basée sur la théorie des parallèles; celle que Legendre avait insérée dans ses précédentes éditions, et qu'il eût bien mieux fait de conserver. Elle a le mérite d'être simple, courte, et elle sera rigoureuse si la théorie des parallèles sur laquelle on la fondera est rationnelle; ce qui est possible, ainsi qu'on le verra bientôt.

J'arrive à la théorie de M. Lemonnier :

« Deux droites, dit-il, tracées sur un même plan, « sont dites parallèles lorsqu'elles ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine pro- « longées; telles sont les deux perpendiculaires à « une même droite. »

Or, suivant ce géomètre, toute la difficulté consiste à etablir les deux propositions suivantes, touchant deux lignes parallèles : 1° *Toute perpendiculaire à l'une l'est à l'autre ;* 2° *les perpendiculaires* *menées de l'une sur l'autre sont égales.* Il se pose et démontre les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME Ier.

Si deux lignes B'B et D'D (fig. 17) *sont à la fois perpendiculaires à une même droite AC, et par conséquent parallèles entre elles, je dis : 1° que toute perpendiculaire EF, abaissée sur l'une D'D du point E pris à volonté sur l'autre B'B, sera égale à AC; 2° que EF, qui coupe D'D à angles droits, en fera autant à l'égard de B'B.*

« Menons, dit-il, par le point E sur EF une per- « pendiculaire indéfinie G'G : alors nous aurons « deux lignes G'G et D'D qui, coupant perpendi- « culairement EF, ne sauraient se rencontrer; en « sorte que l'espace compris entre elles sera suscep- « tible d'une extension infinie des deux côtés de EF : « un autre espace B'D'DB existe pareillement entre « les perpendiculaires B'B et D'D, de part et d'autre « de AC. Mais il arrivera, de deux choses l'une : ou « G'G se dirigera suivant B'B ou s'en écartera; « dans le premier cas, les espaces G'D'DB n'en fe- « ront qu'un seul; dans le deuxième cas, ils seront « équivalents, car ils auront une partie commune « EG'D'DB, tandis que leurs parties restantes se- « ront les espaces angulaires B'EG' et GEB, que « l'on pourra faire coïncider. Cela posé, si EF n'é-

« tait pas égale à AC, il est évident qu'elle serait « plus grande ou plus petite que celle-ci. Supposons « d'abord que EF soit plus grande que AC, et con- « tinuons cette dernière jusqu'en H, de manière que « CH soit égale à EF, puis élevons au point H, sur « CH, la perpendiculaire indéfinie I′I qui n'atteindra « B′B d'aucun côté, à cause que B′B est aussi per- « pendiculaire sur CH. Maintenant nous aurons par « cette construction, un nouvel espace I′D′DI qui « sera superposable sur G′D′GD, en mettant le point « C sur le point F et CH dans la direction de FE, « et comme ces droites sont égales, il en résulte que « le point H se placera en E; en même temps se « fera, d'une part la jonction des angles droits for- « més en C et F; de l'autre celle des lignes I′I et « G′G, qui se trouveront à la fois perpendiculaires « sur EF au même point E. Mais l'espace ID′DI « couvrant ainsi G′D′DG, sera équivalent à B′D′DB; « de sorte qu'on aura la partie égale au tout, chose « impossible; donc EF ne saurait surpasser AC. On « s'assurerait, d'une manière analogue, que EF ne « peut être moindre que AC; donc ces lignes sont « égales entre elles.

« Pour prouver la seconde partie du théorème, « prenons sur le prolongement de CF, une partie « FM qui soit égale à CF; ensuite élevons, au point « M, sur D′D, la perpendiculaire ML, jusqu'à la

« rencontre de AB en un point L : cette perpendi-
« culaire sera égale à CA, en vertu de ce qui précède.
« Actuellement si l'on fait un pli dans la ligne FE
« et que l'on renverse l'espace FL sur l'espace FA,
« FM se dirigera selon FC, attendu que les angles
« en F sont droits, et le point M coïncidera avec le
« point C, du moment que FM = FC; d'ailleurs
« ML prendra la direction de CA, par l'effet de la
« perpendicularité des lignes LM et AC sur D'D ; et
« comme LM = AC, le point L occupera la position
« du point A. D'un autre côté, le point E étant resté
« commun aux droites EA et EL, ces lignes se con-
« fondront; dès lors les angles FEL et FEA se cou-
« vriront mutuellement, ce qui déterminera leur éga-
« lité; mais ces angles, étant adjacents, seront
« nécessairement droits; donc EF sera perpendicu-
« laire sur B'B, aussi bien que sur D'D.

« D'où l'on voit que deux lignes parallèles B'B et
« D'D sont également éloignées l'une de l'autre, et
« que leur distance unique est essentiellement re-
« présentée par EF, ou par toute autre droite qui
« serait menée semblablement. »

Théorème II.

Si deux lignes parallèles AB, CD (fig. 18), sont coupées par *une troisième ligne EF, que l'on appelle sécante, il en résultera cinq propriétés:*

1° *L'égalité de deux angles, comme AGH et GHD,* appelés alternes-internes; 2° etc.

« Pour le démontrer, abaissons du milieu I de « GH une perpendiculaire IL sur CD; puis prolon- « geons IL jusqu'en K, à la rencontre de AB; nous « aurons ainsi une ligne KL qui coupera AB per- « pendiculairement (théorème Ier). Maintenant su- « perposons l'espace IHL sur l'espace IGK, de telle « sorte que le point I reste commun, et que IH « prenne la direction de IG; ces lignes étant égales « entre elles, le point H se placera sur le point G, « tandis que IL se couchera sur IK, puisque les « angles HIL et KIG sont égaux. Cela étant, si le « point I ne tombait pas sur le point K, il tomberait « quelque part en O; alors il s'ensuivrait que d'un « point G, pris hors d'une droite KL, on pourrait « abaisser deux perpendiculaires GK et GO sur cette « droite, ce qui est absurde; donc le point L viendra « se joindre avec le point K : dès lors HL se con- « fondra avec GK; et la coïncidence des angles IGK « et IHL se trouvera effectuée : donc les angles AGH « et GHD, qui ne diffèrent pas des précédents, sont « égaux entre eux. »

De cette première propriété on déduit aisément les autres.

Cette théorie est estimée. Pour moi, je reprocherais à la première partie du premier théorème d'être fondée sur l'hypothèse de grandeurs infinies, hypothèse rationnellement inadmissible. Cette première partie est d'ailleurs bien longue, bien compliquée. Il est regrettable qu'on recoure à une argumentation si pénible pour arriver à une conclusion qui est évidente par elle-même. Est-ce qu'il n'est pas bien évident, en effet, que si, dans un même plan, deux droites sont perpendiculaires à une troisième, ces perpendiculaires seront à égale distance dans toute leur étendue, ou qu'en d'autres termes, toutes les perpendiculaires abaissées de l'une sur l'autre seront égales? Si néanmoins on veut le démontrer, que du moins la démonstration soit courte, saisissante.

M. Dantas-Pereira a aussi présenté une théorie que je vais reproduire.

« 1. Par un point donné hors d'une droite, on ne « peut exercer qu'une seule perpendiculaire à cette « droite.

« 2. Donc deux droites perpendiculaires à une « troisième ne pourront pas concourir.

« 3. Pour exprimer que deux droites ne peuvent « pas concourir, on dit qu'elles sont parallèles[1].

« 4. L'angle d'une parallèle avec les obliques « qu'on peut mener par un de ses points, peut deve-

[1] Il faut, pour être *parallèles*, non-seulement qu'elles ne puissent pas concourir, mais encore qu'elles soient *dans un même plan*.

« nir moindre que toute quantité angulaire donnée, « quoique celle-ci soit très-petite : donc la direction « ou position de la parallèle peut être considérée « comme limite des directions ou positions des obli- « ques qui sortent d'un même point.

« 5. Il s'ensuit que, par un point donné hors « d'une droite, on ne peut mener qu'une seule pa- « rallèle à cette droite.

6. Si par le point C d'une droite D′D (fig. 19), « on mène CA, perpendiculaire à cette droite, jus- « qu'à rencontrer en A la droite B′B parallèle à D′D, « comme la perpendiculaire à CA dans le point A « serait parallèle à D′D (1 et 2), B′B doit être pré- « cisément cette perpendiculaire (5); car on a sup- « posé B′B parallèle à D′D, et, par un point A situé « hors de D′D, on ne peut mener qu'une seule pa- « rallèle à cette droite. Donc CA sera aussi perpen- « diculaire à B′B, et toute perpendiculaire à une « droite sera aussi perpendiculaire à toutes les pa- « rallèles à cette droite.

« 7. Qu'on mène par le point M, pris dans D′D, « une autre perpendiculaire à D′D, cette droite ML « sera perpendiculaire à B′B : encore si par le mi- « lieu F de CM on mène une autre perpendiculaire, « toutes les perpendiculaires CA, FE, ML, seront « parallèles (2); et conséquemment FE doit rencon- « trer B′B dans un point E, situé entre les deux

« points A et L. Donc, en supposant EC sur EM, en « sorte que la droite EF reste commune, FM tom- « bera sur FC, parce que les angles en F sont droits, « et M sur C, car FM = FC, et ML sur CA, car les « angles C et M sont droits; par la même raison EL « tombera sur EA ; donc L doit tomber sur A, et « conséquemment LM doit s'ajouter avec AC : d'où « on doit conclure LM = AC et EA = EL.

« 8. Le point L a été pris arbitrairement; donc « tous les points d'une parallèle sont distants éga- « lement de l'autre parallèle.

« 9. L'inverse est évidente.

« 10. En supposant que AC et LM soient les pa- « rallèles, B'B et D'D seraient les perpendiculaires, « et on aurait AL = CM.

« 11. Supposons maintenant les parallèles AB, CD « (fig. 20) coupées par EF, que nous appellerons « *sécante*, H et G étant les points communs à cette « sécante et aux deux parallèles; si on mène HM « perpendiculaire sur AB et GN perpendiculaire sur « CD, et si on imagine HGNH sur HGMH, en sorte « que G tombe sur H et GN sur MH, ces deux droites « coïncideront (6 et 7), et HN s'ajustera avec MG « (6 et 10); donc l'angle HGM = l'angle GHN.

« 12. Ces angles, parce qu'ils sont en dedans des « parallèles, sont appelés *internes;* et parce qu'ils « sont de différents côtés de la sécante, on les appelle

« *alternes* : donc *dans les parallèles coupées par une* « *sécante, les angles alternes internes sont égaux.* »

Le reste se déduit facilement.

Cette théorie est très-acceptable ; je la préfère beaucoup à celle de M. Lemonnier qui, nous l'avons vu, est irrationnelle, reposant sur l'impossible hypothèse d'espaces infinis. Cependant les raisonnements compris sous les numéros 4 et 5, par lesquels l'auteur établit que, par un point donné hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite, sont un peu subtils.

Au reste, la conséquence énoncée au numéro 4 ne mérite pas le reproche que lui adresse le traducteur de la *Géométrie sans axiomes* : cette conséquence n'a point le défaut que j'ai signalé dans la démonstration de Franceschini. Ici il est évident que l'oblique s'approchera aussi près qu'on voudra de la parallèle sans l'atteindre, et qu'à ce point de vue la parallèle sera *limite* des obliques.

Je parlerai bientôt de la théorie de Bertrand de Genève. M. Vincent en a présenté une analogue à celle de ce géomètre, dont il a admis les principes. Elle a le tort de se fonder sur l'hypothèse d'espaces infinis.

L'auteur, il est vrai, se sert parfois du mot *indéfini*, au lieu du mot *infini*, notamment en parlant du plan ; mais si son plan n'est pas infini, une bande comprise entre deux parallèles ne peut être contenue un nombre infini de fois dans ce plan, comme il le professe, et alors tout le système croule. Alors on ne voit pas qu'un angle, qui, il est vrai, n'est contenu dans un plan quelconque qu'un nombre limité de fois, soit toujours plus grand que l'espace compris entre deux parallèles, si grand que soit cet espace. L'auteur eût donc mieux fait d'employer franchement le mot *infini*, au lieu du mot *indéfini*.

M. Vincent ne conçoit pas une théorie des parallèles dégagée de l'infini. « Comprennent-ils bien, « dit-il, ce qu'ils demandent, ceux qui prétendent « dégager la théorie des parallèles, tant implicite- « ment qu'explicitement, de toute notion d'infini? Je « ne sais si je m'abuse moi-même, mais, à mon « sens, ils ne ressemblent pas mal à un mécanicien « qui s'évertuerait pour asseoir les principes de la « théorie du mouvement sur d'autres bases que les « notions de la force, du temps et de l'espace. » — N'équivoquons pas : autre chose est, répondrai-je à M. Vincent, de supposer l'infini, un espace infini; autre chose est de supposer des lignes ne pouvant se rencontrer, quel que soit leur prolongement : ce n'est pas donner à ces lignes l'infinité.

Dans sa *Géométrie sans axiomes*, M. Tompson présente une démonstration de cette proposition fondamentale, qui est le *postulatum* d'Euclide :

Si deux droites situées dans un même plan sont rencontrées par une troisième, et que la somme des deux angles intérieurs d'un même côté de cette ligne soit moindre que deux angles droits, les deux premières droites étant prolongées finiront par se rencontrer du côté des angles précités.

Cette démonstration est acceptable; mais elle se fonde, en réalité, sur des axiomes rationnels ou sur des propositions que l'auteur a démontrées au moyen d'axiomes de ce genre déguisés sous la forme de dénominations. Ainsi, il invoque les corollaires 1, 2, 4, 8 et 18 de la proposition première, proposition qui, je l'ai montré plus haut, est vraiment basée sur des axiomes; il invoque le numéro 148, où il a démontré que les angles qu'une droite fait avec une autre et du même côté valent ensemble deux angles droits, théorème qu'il a réellement fondé sur le corollaire 4 de la proposition première. Il invoque la proposition numéro 136, fondée sur le corollaire 7 de la proposition première; il invoque enfin le corollaire 5 de la proposition treizième, laquelle repose sur l'axiome : *Le tout est plus grand que sa partie.*

Toutes ses démonstrations relatives aux parallèles ont pour fondements quelque vérité évidente par elle-même, quelque axiome rationnel caché sous le voile de la nomenclature.

La théorie, en somme, serait, je pense, satisfaisante, si les principes, les axiomes rationnels qu'elle contient implicitement étaient avoués, positivement énoncés.

Tout considéré, la théorie de Lacroix me paraît être une des meilleures de celles qui ont été produites.

Cette théorie est fondée sur un *postulatum* que j'ai cité plus haut et qui est celui-ci : *Une droite qui est perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre; et il n'y a par conséquent, sur un plan, que les droites perpendiculaires à une même ligne qui ne se rencontrent pas ou qui soient parallèles entre elles.*

J'ai dit que ce *postulatum*, qui est une modification de celui d'Euclide, n'est pas non plus évident par lui-même; mais l'auteur l'a fait précéder et l'a déduit des considérations suivantes :

« 1° Si, par le point D (fig. 21), on mène une « droite HH', qui fasse avec la ligne DB un angle « HDB, moindre que le droit EDB, ou qui soit « inclinée vers la partie FG de la droite GG' perpen- « diculaire sur AB, elle rencontrera GG' lorsqu'elles « seront suffisamment prolongées l'une et l'autre au- « dessus de AB. 2° Si, par le même point D, on « mène la droite II', qui fasse avec DB, l'angle IDB « plus grand que le droit EDB, comme elle fera au- « dessous de AB, l'angle I'DB moindre que le droit

« E'DB, elle inclinera vers la partie FG' de la droite « GG' et rencontrera, par conséquent, cette droite « prolongée suffisamment au-dessous de AB. »

Or, ces considérations de Lacroix, jointes à la demande qui en est la conclusion, forment un théorème qui laisse peu à désirer.

On pourrait donner à cette démonstration la forme ordinaire des théorèmes, pour mieux la faire ressortir.

On formulerait d'abord séparément les axiomes qui figurent explicitement ou implicitement dans la démonstration. Ces axiomes seraient les suivants :

1^{er} axiome. Si, dans un même plan, par un point D (même figure), on mène une droite HH', qui fasse avec une ligne DB un angle HDB, moindre que le droit EDB, la ligne HH' sera inclinée vers la partie FG de la droite GG', perpendiculaire abaissée sur AB à un point tel que la partie DH de HH' soit entre ED et FG.

2^e axiome. Quand une ligne HH' (même figure) est inclinée vers une autre GG', dans un même plan, ces deux lignes, suffisamment prolongées, doivent nécessairement se rencontrer du côté de l'inclinaison.

3^e axiome. Si par un point D (même figure) on mène la droite II' qui fasse avec DB l'angle IDB plus grand que le droit EDB, elle fera au dessous de AB l'angle I'DB moindre que le droit E'DB.

Au moyen de ces axiomes, on démontrerait la proposition qui forme le *postulatum* en question.

Raisonnant dans les conditions supposées de la figure 21, à laquelle se rapportent ces mêmes axiomes, on dirait :

1° La ligne HH' est inclinée vers la partie FG de la perpendiculaire GG' (axiome 1). Étant inclinée ainsi, elle rencontrera GG' lorsqu'elles seront suffisamment prolongées l'une et l'autre au-dessus de AB (axiome 2).

2° La droite I I' fait au-dessous de AB, avec DB, l'angle I'DB moindre que le droit E'DB (axiome 3); conséquemment, elle incline vers la partie FG' de la droite GG' (axiome I), et ainsi inclinée, elle rencontrera cette droite lorsqu'elles seront suffisamment prolongées au-dessous de AB (axiome 2).

Or, toute oblique à une droite quelconque AB rentre dans l'un de ces deux cas. Donc, généralement, *dans un même plan, une droite qui est perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre.*

Corollaire. Il n'y a, par conséquent, dans un même plan, que les droites perpendiculaires à une même ligne qui ne se rencontrent pas.

Je ne vois rien qu'on puisse justement objecter contre cette démonstration. Elle est fondée sur des axiomes rationnels, sur des propositions dont je ne saurais douter. Il me suffit de les considérer en elles-mêmes pour être convaincu de leur vérité.

Lacroix a défini les parallèles, « des droites qui, « quoique situées dans le même plan, ne se rencon-« trent pas. » — Il faudrait ajouter, *à quelque distance qu'elles soient prolongées.*

D'ailleurs, cette définition qui a prévalu parmi les géomètres n'est pas conforme au sens, à l'idée que l'on attache généralement au mot *parallèle.* Suivant l'acception générale, on entend par lignes parallèles, des droites d'égale étendue, situées dans un même plan et à égale distance l'une de l'autre dans toute leur étendue. Par distance, on entend la perpendiculaire abaissée d'une des lignes sur l'autre.

Il s'ensuit bien que ces lignes ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'elles soient prolongées, fussent-elles supposées infinies ; mais cette impossibilité de se rencontrer est une conséquence de leur équidistance, de leur parallélisme en ce sens ; elle n'est pas leur parallélisme même. Pourquoi ne pas employer le mot *parallèle* dans le sens général ? Pour moi, il me paraît bien plus convenable de lui conserver cette acception.

Je propose donc cette définition, qui d'ailleurs a été, à peu de chose près, celle de plusieurs géomètres : « Sont dites parallèles deux droites situées « dans le même plan et à égale distance dans toute « leur étendue, prolongée, si cela est nécessaire, « pour qu'une perpendiculaire puisse être abaissée « de l'une quelconque de ces lignes sur un point « quelconque de l'autre. »

Il est évident sans démonstration que si deux lignes droites, situées dans un même plan, sont à égale distance en deux points de leur étendue, elles le seront dans toute leur longueur, prolongée, s'il est nécessaire ; qu'ainsi elles sont parallèles.

De même que des droites qui, dans un même plan, sont également distantes l'une de l'autre dans toute leur étendue, ne peuvent nulle part se rencontrer, quel que soit leur prolongement ; ainsi il est visible que, si elles sont inégalement distantes dans toute leur étendue, elles doivent se rencontrer, suffisamment prolongées, et cela du côté de leur moindre distance.

Comme corollaires de ces deux propositions ou axiomes, on peut affirmer :

1° Que si des droites, dans un même plan, et suffisamment prolongées, doivent se rencontrer, elles sont inégalement distantes l'une de l'autre dans toute leur longueur ; 2° que si, dans les mêmes conditions, des droites ne peuvent se rencontrer, elles sont également distantes. En effet, si elles étaient également distantes, elles ne sauraient se rencontrer, et si elles étaient inégalement distantes, elles devraient se rencontrer.

De ces diverses propositions, il résulte qu'il n'y a, dans un même plan, que des droites également distantes qui ne puissent pas se rencontrer, et réciproquement : car des lignes droites quelconques, dans un même plan, doivent nécessairement être ou également distantes, ou inégalement distantes l'une de l'autre ; elles doivent être ou dans le cas de ne pouvoir se rencontrer, ou dans le cas opposé.

La modification que j'indique et crois bon de faire dans la définition des parallèles pourrait s'accorder avec la théorie de Lacroix : il suffirait de retrancher le corollaire du dernier théorème de cette théorie. Ce corollaire, qui conclut que deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre, deviendrait évidemment sans objet.

En appliquant à la théorie de Lacroix la définition que je propose, on pourrait supprimer le *postulatum* sur lequel il l'a édifiée. En effet, ce *postulatum* n'est nécessaire que pour prouver cette proposition que *quand deux droites DF et FG sont parallèles, toutes les droites telles que LM, qui sont perpendiculaires sur l'une le sont en même temps sur l'autre*, proposition sur laquelle repose ensuite tout le reste de la théorie. Or, si l'on définit les parallèles comme je le propose, on pourra admettre, comme vérité évidente par elle-même, la proposition dont il s'agit. Elle paraîtra, je pense, aussi et même plus acceptable que le *postulatum* de Lacroix, et alors on pourra se passer de cette demande que plusieurs géomètres répugnent à admettre. La théorie sera ainsi simplifiée.

Au reste, alors même qu'on présente une démonstration rigoureuse d'une proposition qui paraît évidente en soi, il est convenable de dire qu'elle est évidente. Ce cumul serait utile en ce qu'il montrerait que la raison s'accorde avec elle-même dans tous les modes qu'elle emploie pour apercevoir la vérité : un tel accord, je l'ai déjà dit, est imposant.

Ainsi, il est évident, bien qu'on le démontre, que d'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite. Pourquoi, avant ou après la démonstration de cette vérité, ne pas déclarer l'évidence qu'elle offre en elle-même ?

Ainsi encore, il est évident, bien qu'on le démontre, que, si deux lignes, dans un même plan, sont perpendiculaires à une troisième, ces deux perpendiculaires sont à égale distance l'une de l'autre dans toute leur étendue.

Il est évident, bien qu'on le démontre, que quand une droite en coupe une autre, les angles opposés au sommet qui résultent de cette section sont égaux.

Il est évident, bien qu'on le démontre, que quand deux parallèles sont coupées par une troisième droite : 1° les angles correspondants sont égaux; 2° les angles alternes internes sont égaux; 3° les angles alternes externes sont égaux.

Pourquoi ne pas déclarer l'évidence de ces égalités, si on les reconnaît, alors même qu'on les démontre ?

Lacroix, qui n'avait guère foi aux axiomes rationnels, conséquemment aux propositions basées sur de tels principes, doutait un peu lui-même de la valeur de son *postulatum*. « C'est, dit-il, dans sa « note à ce sujet, c'est dans la difficulté de prouver « immédiatement cette proposition que réside l'im« perfection de la théorie des parallèles. Beaucoup « d'auteurs ont fait, pour en venir à bout, des efforts « inutiles, et d'autres, comme Bezout, ont dissi« mulé le vice du raisonnement, ce qui me semble « contraire au devoir rigoureux que s'impose tout « auteur d'ouvrages élémentaires, de ne donner ja« mais que des notions exactes, et surtout d'en « faire connaître avec soin l'origine. J'ai jugé con« venable de mettre en évidence le point délicat en « formant, à l'exemple d'Euclide, une *demande*, « mais que je crois plus aisée à accorder que la

« sienne, parce qu'elle présente la difficulté réduite « à ses moindres termes. »

Lacroix, dans cette note, dit que, suivant lui, Bertrand de Genève est seul parvenu à démontrer d'une manière convenable le *postulatum* en question. Voici le fond de cette démonstration de Bertrand de Genève :

« Il est d'abord évident que si l'on ajoute un « angle quelconque edh (figure 22) un nombre « suffisant de fois à lui-même, comme le montre la « figure, en hdh', $h'dh''$, $h''dh'''$, $h'''dh''''$, on par- « viendra toujours à former un angle total edh'''' plus « grand que l'angle droit edb; mais si l'on élève « sur la droite DB les perpendiculaires DE et FG, « prolongées indéfiniment, on formera une bande « indéfinie EDFG, qui ne saurait remplir l'angle « droit EDB, quelque nombre de fois qu'elle soit « ajoutée à elle-même. En effet, si l'on prend FK « = DF, et qu'on élève KL perpendiculaire sur AB, « que l'on plie ensuite la figure le long de FG, la « bande EDFG couvrira exactement la bande « GFKL; car les angles GFD, GFK étant droits, la « partie DF tombera sur FK; et comme DF égale « FK par construction, le point D se placera sur le « point K; de plus l'angle FKL étant droit aussi « bien que EDF, la ligne DE se placera sur KL. « Cela posé, puisqu'on peut prendre sur la droite

« indéfinie DB autant qu'on voudra de parties égales « à DF, sans arriver à son terme, on formera un « nombre aussi grand qu'on voudra de bandes égales « à EDFG, sans pouvoir couvrir l'espace indéfini « compris entre les deux côtés de l'angle droit EDB. « Il suit de là que, considérées relativement à leurs « limites latérales, la surface de l'angle *edh* est plus « grande que celle de la bande EDFG. Si donc on « construit dans cette bande, sur la droite ED, un « angle EDH égal à *edh*, il ne pourra demeurer « contenu entre les lignes ED et FG : son côté DH « coupera nécessairement la droite FG. »

Lacroix ajoute cette explication : « Pour sentir, « dit-il, la force de cette démonstration, il faut bien « concevoir que lorsqu'on applique l'angle droit « *edb* sur l'angle EDB, ces deux surfaces doivent « toujours coïncider entre leurs limites latérales *de* « et *db*, DE et DB, quelque loin qu'on la prolonge ; « alors on verra que si les angles construits dans les « bandes n'en sortaient pas, ils laisseraient un vide « indéfini après la dernière bande, et un autre dans « chaque bande; mais celui-ci, qui a toujours lieu « près de leur sommet, est plus que compensé par « les espaces qui leur deviennent communs quand « ils sont sortis des bandes, parce que leurs côtés se « croisant, ils se recouvrent en partie : tel est l'es- « pace MNO, commun aux angles EDH, GFH'.

« Avec cette explication, il ne doit rester, à ce que « je crois, aucun doute fondé sur ce que l'infini « entre dans les considérations précédentes, car il « ne s'agit que de concevoir qu'il est toujours pos- « sible de placer dans l'angle droit un nombre de « bandes qui surpasse un nombre donné, quelque « grand que soit ce dernier. »

Il me paraît que cette explication de Lacroix, du moins en ce qu'elle a trait à l'infini, est plutôt de nature à obscurcir la démonstration dont il s'agit, qu'à l'éclaircir. En effet, cette démonstration n'est intelligible, n'est logique qu'à la condition de considérer comme vraiment infinis dans un sens les espaces angulaires et les bandes comprises entre parallèles qui y figurent. De cette manière, on conçoit que l'espace compris par l'angle droit étant rempli par l'angle aigu *edh*, ajouté à lui-même un certain nombre limité de fois, tandis que la bande EDFG ne saurait parvenir à remplir cet espace infini, quelque nombre fini de fois qu'elle fût prise et insérée dans l'angle droit parallèlement à l'un de ses côtés, on conçoit, dis-je, que l'on doive conclure que l'angle aigu est plus grand que la bande, et que, par conséquent, l'angle aigu EDH et la bande EDFG étant insérés en même temps dans l'angle droit, comme on le suppose, l'angle aigu ne peut être entièrement contenu dans la bande, et que son côté DH doit ainsi couper la parallèle FG. A la vérité, l'angle aigu construit dans l'angle droit et dans la bande laisse un espace triangulaire du côté de son sommet ; mais c'est une raison de plus pour juger que DH coupera la parallèle FG de la bande EDFG, puisque l'angle EDH, à son point de départ, ne prend pas toute cette bande. Si, au contraire, l'on n'attribue pas des espaces infinis aux angles et aux bandes considérés, la spéculation manque de base, de point de comparaison. Vainement on dissimule l'idée d'*infini* sous l'expression d'*indéfini*; vainement Lacroix substitue à l'idée réelle d'infini la conception d'un nombre de bandes pouvant être indéfiniment augmenté et être ainsi au-dessus de toute quantité donnée. Avec cette substitution, ou cette conception, le théorème est illogique. Je l'ai dit plus haut, si le plan n'est pas supposé infini, une bande ne peut y être contenue une infinité de fois, et alors on ne voit pas qu'un angle compris par le plan soit nécessairement plus grand qu'une bande, si grande qu'elle soit. Or l'infini est impossible. Les angles et les bandes supposés infinis dans un sens ne sauraient être inégaux en étendue : il y aurait donc ici une contradiction, une antinomie. Le théorème, basé ou non sur l'infini réel, est donc sans valeur rationnelle.

Lacroix, en plaçant au premier rang le théorème fondamental de Bertrand de Genève, lui faisait donc beaucoup trop d'honneur. Il était injuste envers lui-même en méconnaissant la force de son *postulatum* étayé par des axiomes rationnels qui le prouvent.

En résumé, il faut bien que la théorie des parallèles, comme toute théorie, pour être solidement constituée, repose sur quelque axiome rationnel, sur quelque vérité évidente par elle-même. Si l'on eût très-généralement reconnu ce point essentiel; si surtout l'on eût cru pouvoir adopter quelque axiome non consacré par l'usage, la théorie des parallèles n'eût pas sans doute excité tant de débats : il y aurait eu, je pense, moins de divergence sur cette question, et l'on serait arrivé à des résultats plus satisfaisants; on n'aurait pas vu se produire ces spéculations si excentriques, ces espèces de tours de force ou de subtilité ingénieuse qui ont assez vainement occupé les esprits à la recherche de la meilleure théorie des parallèles.

CHAPITRE VII

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES ET DES QUANTITÉS INDÉTERMINÉES. — DES EXPRESSIONS DE CES QUANTITÉS, ET DE QUELQUES AUTRES EXPRESSIONS.

On appelle généralement *quantités irrationnelles*, les quantités qui ne sauraient contenir un nombre exact d'unités, soit absolument, soit relativement à quelque autre quantité.

Tels sont principalement les radicaux algébriques, comme :

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{5},\quad b\sqrt{2a},\quad 2abc\sqrt{5db},\quad \sqrt[3]{29a^2b^4},\ \text{etc.}$$

Ces radicaux, toutefois, peuvent, sans absurdité, figurer dans les calculs. Le résultat peut même n'être pas irrationnel ; car, outre que deux radicaux semblables, mais dont l'un est positif, et l'autre négatif, tels que $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, se détruisent, si des radicaux semblables du second degré, quel que soit d'ailleurs le signe de chacun d'eux, sont multipliés l'un par l'autre, leur produit, carré du radical, abstraction faite du signe, est une quantité rationnelle.

Ainsi :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \text{ ou } -\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = 3,$$

et

$$\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -3.$$

De même, si trois radicaux du troisième degré, semblables, sont multipliés entre eux, leur produit, cube du radical, est aussi une quantité rationnelle, et ainsi de suite, pour les autres degrés. Je suppose ici que les radicaux ne soient pas des fonctions ou combinaisons de radicaux de divers degrés; autrement les produits ne seraient pas rationnels : par exemple, $\left(\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\right)^3$ n'est pas une quantité rationnelle.

Au reste, on peut obtenir arithmétiquement une valeur aussi approchée qu'on le veut de celle exprimée par un radical numérique; on peut trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, en produise un qui diffère aussi peu qu'il convient de celui qui est sous le signe du radical.

Les radicaux sont irrationnels, ou absolument, ou relativement. Je m'explique : s'ils n'expriment que des quantités abstraites, ils sont absolument irrationnels; car jamais il ne peut y avoir un nombre qui exprime exactement, par exemple, la racine carrée de 7 ou de 11, jamais un nombre qui, multiplié par lui-même, produise 7 ou 11. Mais si ces quantités irrationnelles sont affectées à des quantités concrètes, alors de deux choses l'une, ou bien la quantité concrète envisagée est une chose divisible, une chose qui se mesure, se pèse, ou bien elle est indivisible. Dans ce dernier cas, les radicaux sont absolument irrationnels, comme le sont ceux qui n'offrent que des unités abstraites. Telles seraient les expressions $\sqrt{6 \text{ chapeaux}}$, $\sqrt[3]{5 \text{ tables}}$. Dans la première hypothèse, la quantité n'est irrationnelle que relativement. Soit, je suppose, la racine carrée de sept mètres carrés, exprimée ainsi : $\sqrt{7 \text{ m. c.}}$[1]. Il peut y avoir un carré équivalent à la quantité exprimée par 7 m. c. Le côté de ce carré est une moyennne proportionnelle entre une ligne de 7 mètres et une ligne de 1 mètre. Or on peut déterminer graphiquement cette moyenne qui, si elle est régulièrement construite, représentera exactement la quantité exprimée par $\sqrt{7 \text{ m. c.}}$ Cette quantité peut donc être supposée réelle : seulement elle ne saurait être exprimée exactement par l'unité métrique. A ces points de vue, il est vrai de dire qu'elle est irrationnelle, mais que son *irratio-*

1. En exprimant le mètre par a, on aurait, algébriquement, $\sqrt{7a^2}$.

nalité n'est pas absolue, qu'elle n'est que relative. Il en serait ainsi de $\sqrt{6 \text{ toises carrées}}$.

De même, on conçoit un cube équivalent réellement à une certaine quantité d'unités cubes, bien que cette dernière quantité ne soit pas un cube parfait. Ainsi, par exemple, il peut y avoir un cube équivalent à 9 pieds cubes, et quoique ce cube ne soit pas un cube parfait, envisagé comme contenant des pieds cubes, son arête sera réellement équivalente à la racine cube de 9 pieds cubes. On ne pourra exprimer cette racine ou arête en unités de pieds cubes, mais on pourra, en appliquant le procédé de deux moyennes proportionnelles continues, la déterminer graphiquement, la construire.

S'il s'agit de quantités concrètes divisibles, mais linéaires, on peut encore dire que le radical n'est irrationnel que relativement. En effet, bien que, par exemple, on ne puisse exprimer numériquement $\sqrt{7 \text{ mètres}}$, $\sqrt[3]{6 \text{ toises}}$, etc., on conçoit cependant certaines quantités linéaires, déterminables comme je l'ai dit plus haut, qui soient équivalentes, en unités de mètre ou de toise, et en parties irrationnelles de mètre ou de toise, aux quantités exprimées par ces radicaux.

On peut aussi admettre des quantités de durée ou de poids représentées par des radicaux qui ne soient ainsi irrationnels que relativement. Si, par exemple, on a les radicaux $\sqrt{7 \text{ heures}}$, $\sqrt{5 \text{ grammes}}$,

$$\sqrt{7 \text{ heures carrées, ou cubes}},$$

$$\sqrt{5 \text{ grammes carrés, ou cubes}},$$

il n'est pas absurde de les supposer équivalents à une certaine quantité d'heures ou de grammes et à une certaine partie irrationnelle de l'une ou de l'autre de ces unités. Mais on ne peut construire une moyenne proportionnelle entre des unités de ces deux sortes de quantités, comme pour des unités de lignes. Nulle construction directe ne saurait fournir la racine carrée ou cube de 7 heures, de 5 grammes. Ce procédé ne s'applique pas à des quantités qui ne rentrent pas dans la mesure de l'*étendue* proprement dite. Toutefois, bien que l'on ne puisse construire directement ces sortes de quantités, il est supposable qu'elles sont réalisées, qu'il y a telle durée, par exemple, qui est moyenne proportionnelle entre certaine durée prise pour unité et certaine autre durée qui n'est pas un carré parfait d'unités. Il est même supposable qu'on puisse les effectuer, les déterminer indirectement par des procédés mécaniques. Bien entendu qu'il ne saurait être question de durées *carrées* ou *cubes*, de poids *carrés* ou *cubes*, en ce sens qu'il y ait des durées ou des poids à deux ou trois dimensions : l'idée de dimension appliquée à la durée et au poids ne comporte pas la pluralité.

Outre les radicaux, il y a des quantités ou grandeurs irrationnelles. On conçoit, en effet, des lignes ou des surfaces, ou des volumes, qui, sans être envisagés comme des radicaux, soient incommensurables entre eux, c'est-à-dire n'aient pas de commune mesure, ne puissent être regardés comme contenant chacun un nombre exact d'unités et ainsi soient irrationnels entre eux. Il en est ainsi quant aux durées et aux poids.

Cette irrationalité n'est évidemment que relative. En soi, une grandeur, une ligne, par exemple, n'est ni rationnelle ni irrationnelle. Une grandeur considérée comme irrationnelle peut toujours être conçue divisée exactement en un nombre quelconque de parties égales prises pour unités, et être envisagée comme rationnelle relativement à une autre qui ne contiendrait pas un nombre exact d'unités, et qui serait alors considérée comme irrationnelle[1].

1. L'unité de mesure est évidemment arbitraire.

Je ne vois pas, d'ailleurs, l'utilité de prendre l'unité de mesure dans la nature. Il me semble bien peu important que le *mètre* soit la dix-millionième partie du quart du méridien. En quoi cette détermination serait-elle utile? Serait-ce en ce que l'on retrouverait toujours cette mesure si elle venait à se perdre, à s'altérer. — Pourquoi se perdrait-elle? Peut-on bien, d'ailleurs, regarder comme certain qu'un nouveau mesurage donnerait exactement le même résultat que le premier?

Une grandeur irrationnelle est considérée comme contenant un certain nombre d'unités, ou une fraction exacte d'unité, et de plus une portion irrationnelle d'unité.

Des grandeurs irrationnelles, quoiqu'on ne puisse les exprimer exactement en nombre, sont mathématiques ; elles sont susceptibles d'être en rapport entre elles et avec des quantités rationnelles.

Ainsi une grandeur irrationnelle peut, sans absurdité, être conçue comme multipliée ou divisée par une autre grandeur, soit rationnelle, soit irrationnelle, et réciproquement une quantité rationnelle peut se trouver dans l'un de ces cas. Cela s'accorde, se concilie très-bien avec cette définition générale : *Multiplier un nombre par un autre, c'est former un troisième nombre qui soit composé avec le premier comme le second est composé avec l'unité*, et avec la définition générale de la division.

Il en est de même quant à l'addition et à la soustraction. Une grandeur irrationnelle peut s'ajouter à une grandeur irrationnelle ou rationnelle, ou bien être soustraite d'une grandeur irrationnelle ou rationnelle.

Évidemment, le produit d'une quantité rationnelle multipliée par une quantité irrationnelle est irrationnel ; mais celui d'une quantité irrationnelle multipliée par une quantité irrationnelle peut être rationnel. Le quotient d'une quantité rationnelle divisée par une irrationnelle est irrationnel ainsi que celui d'une quantité irrationnelle divisée par une rationnelle; le quotient d'une quantité irrationnelle divisée par une irrationnelle peut être rationnel ou irrationnel.

Inutile de dire que si d'une irrationnelle on retranche une rationnelle, ou si d'une rationnelle on retranche une irrationnelle, le reste sera irrationnel; mais que si d'une irrationnelle on retranche une irrationnelle, le reste pourra être rationnel.

Il est visible également que deux irrationnelles ajoutées ensemble peuvent former un tout rationnel ou irrationnel.

Ainsi, il est évident que des quantités irrationnelles peuvent entrer dans une proportion géométrique ou arithmétique, et cela, soit qu'elles figurent avec des quantités rationnelles, soit que les quatre quantités de la proportion soient irrationnelles relativement à quelque autre quantité; et l'on pourra appliquer à ces proportions toutes les règles, toutes les propriétés concernant les proportions géométriques ou arithmétiques, en général.

On pourra, par exemple, dire avec vérité, pour les premières, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et l'on pourra, sans troubler la proportion, mettre les extrêmes à la place des moyens, mettre un extrême ou un moyen à la place de l'autre extrême ou de l'autre moyen.

Soit cette proportion :

Côté du carré A : Diagonale du carré A :: côté du carré B : Diagonale du carré B, où figurent certainement des lignes irrationnelles. On peut néanmoins admettre mathématiquement, que côté de A $\times$ diag. de B $=$ côté de B $\times$ diag. de A. Alors, si l'on considère les diagonales de A et de B comme irrationnelles, et les côtés A et B comme rationnels, on supposera que les unités exactement contenues par le côté de A sont multipliées par les unités et la portion irrationnelle contenues par la diagonale de B; et l'on fera la même supposition pour la multiplication du côté de B par la diagonale de A.

Dans cette proportion, les raisons géométriques sont irrationnelles, quelles que soient les expressions que l'on y regarde comme irrationnelles. Si le dividende du rapport est rationnel et le diviseur irrationnel, la raison géométrique, qui est le quotient et qui sera irrationnelle, devra, multipliée par le diviseur, reproduire le dividende : on a donc ici un cas où le produit de deux quantités irrationnelles est rationnel.

J'ai peu de chose à dire ici des quantités ou expressions dites *imaginaires*. On nomme ainsi des expressions de la forme $\sqrt{-A}$, qui indique une racine carrée à extraire d'une quantité négative; extraction impossible, tout carré devant être nécessairement une quantité positive.

Les expressions dites imaginaires sont donc des quantités vraiment chimériques, absurdes en elles-mêmes; mais elles sont néanmoins susceptibles de jouer un rôle dans les calculs algébriques, et même de manière à donner des résultats réels, mathématiques. En effet, une expression imaginaire multipliée par elle-même produit une expression réelle. En trigonométrie, notamment, on envisage avec raison et utilité l'expression *cos.* A + *sin.* A comme le produit des deux facteurs imaginaires

$$cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A$$

et

$$cos\ A - \sqrt{-1}\ sin\ A.$$

J'ajoute qu'il est des équations dont les racines sont imaginaires, en totalité ou en partie.

Les calculs donnent souvent des résultats de l'une de ces formes : $\frac{o}{A}$, $\frac{o}{o}$, $\frac{A}{o}$, A étant une quantité autre que zéro. Que valent ces expressions? Quelle est leur véritable signification mathématique, envisagées en elles-mêmes?

$\frac{o}{A}$ est égal à o. En effet, o divisé par A égale o, car le diviseur A multiplié par le quotient o reproduit le dividende o : mathématiquement donc, rationnellement, l'expression $\frac{o}{A}$ égale o et seulement o.

Il n'en est pas ainsi de $\frac{o}{o}$. o divisé par o peut et doit être envisagé, mathématiquement, comme égalant un nombre quelconque : car soit, pour quotient de cette division, un nombre quelconque A (qui peut d'ailleurs être o) ; le diviseur o multiplié par le quotient A reproduira le dividende o : un nombre quelconque de zéros ne peut, mathématiquement même, valoir plus que o. On voit ainsi que $\frac{o}{o}$ est l'expression d'une quantité *indéterminée;* c'est le symbole numérique de l'indétermination. $\frac{A}{o}$ ne peut exprimer une quantité mathématique; car la division de A par o ne saurait donner un quotient quelconque qui, multipliant le diviseur o, pût reproduire A. L'expression $\frac{A}{o}$ est donc en soi un signe d'impossibilité, d'absurdité.

On conçoit cependant que $\frac{A}{o}$ figure, sans absurdité, dans un calcul. Ainsi, par exemple, si l'on avait l'équation $x = \frac{A}{o} \times \frac{o}{o}$, ou $\frac{A}{o} \times \frac{o}{A}$, on aurait réellement $x = \frac{o}{o}$, valeur indéterminée.

Les algébristes n'ont point toujours justement interprété l'expression $\frac{A}{o}$; ils n'ont même pas toujours justement qualifié l'expression $\frac{o}{o}$.

A la vérité, il ne suffit pas d'avoir trouvé, pour la valeur d'une des inconnues, une quantité de la forme $\frac{o}{o}$, pour que l'on soit en droit de conclure que cette inconnue est réellement indéterminée, que les équations du problème sont indéterminées. On sait, par exemple, qu'une valeur de la forme $\frac{o}{o}$ peut contenir un facteur commun aux deux termes de la fraction et dont la suppression fasse évanouir l'indétermination. Outre le cas du facteur commun, il peut, notamment, arriver que les autres inconnues prennent et conservent des valeurs de la forme $\frac{A}{o}$, et que, par suite, les équations soient *incompatibles.*

Il est même des cas où les équations sont incompatibles, bien que les valeurs de toutes les inconnues se présentent sous la forme $\frac{o}{o}$. A cet égard, l'Algèbre établit les règles qui sont applicables suivant les circonstances; mais en soi-même l'expression $\frac{o}{o}$ est toujours le signe, le symbole de l'indétermination.

On regarde ordinairement $\frac{A}{o}$ comme l'expression de l'infini; en sorte que l'infini étant représenté par le signe ∞, on a $\frac{A}{o} = \infty$. Cette conception est entièrement fausse, contraire à la raison, car 1° il n'y a point d'infini, de quantité infiniment grande, soit que, par là, on entende une quantité réellement sans fin, sans limite, soit qu'on entende une grandeur au-dessus de toute quantité *assignable;* 2° Quand même une telle quantité serait admissible, $\frac{A}{o}$ ne saurait égaler l'infini, l'équation $\frac{A}{o} = \infty$ ne saurait être vraie, car si elle l'était, on devrait pouvoir en tirer celle-ci : $o \times \infty = A$, résultat absurde : une infinité de o, ou o pris une infinité de fois ne vaut que o, ne vaut donc pas A, qu'on suppose différent de o.

Pour justifier cette interprétation, on a raisonné ainsi : A, a-t-on dit, divisé par une quantité quelconque, doit donner un quotient d'autant plus grand que le diviseur est plus petit. Si donc on suppose le diviseur arrivé à la limite de la petitesse, à o, le quotient devra s'élever au plus haut degré de grandeur, et ainsi être infiniment grand.

De l'expression $\frac{A}{o} = \infty$, dont je viens de parler, on a tiré $\frac{A}{\infty} = o$, et l'on a conclu que $\frac{A}{\infty}$ était l'expression de l'infiniment petit, en regardant o comme exprimant le dernier degré de petitesse, ou une quantité plus petite qu'aucune quantité assignable. Ou bien, considérant directement l'expression $\frac{A}{\infty}$, on est arrivé à la même conclusion, en jugeant qu'un quotient est d'autant plus petit que le diviseur est plus grand; que, par conséquent, si ce diviseur est l'infini, le quotient doit être infiniment petit.

Tout cela est essentiellement faux. 1° Point d'infiniment grand, point d'infiniment petit; 2° en supposant l'infiniment grand, on vient de le voir, il ne serait pas représenté par $\frac{A}{o}$; 3° en supposant l'infiniment petit, il ne serait pas représenté par o

qui n'est rien, qui n'exprime que le néant, que l'absence de toute quantité. o est la limite de la petitesse, mais en ce sens que nulle petitesse réelle n'arrive à o. L'expression $\frac{A}{\frac{A}{o}}$ donne, il est vrai, $\frac{o}{A} = o$; mais $\frac{A}{\frac{A}{o}}$ n'est pas égal à $\frac{A}{\infty}$ où ∞ exprime l'infini; et d'ailleurs, je le répète, o n'exprime pas l'infiniment petit; 4° l'équation $\frac{A}{\infty} = o$ est fausse, car on en tire $\infty \times o = A$, résultat absurde : l'infini pris o fois est égal à o, et non pas à A; 5° une quantité finie A ne peut être divisée par l'infini, car si petit que fût supposé le quotient, si le diviseur ∞ était multiplié par ce quotient, ou, ce qui est la même chose, si ce quotient était pris une infinité de fois, le produit serait infini, et ainsi ne donnerait pas le dividende A.

En Algèbre, l'expression de la forme $\frac{A}{o}$, prise pour celle de l'infini, est regardée comme pouvant donner une véritable solution dans certains problèmes où une inconnue se présente finalement sous cette forme; mais en réalité, cette expression ne saurait être vraiment une solution, comme on l'entend, c'est-à-dire comme représentant l'infini. Ceci va s'expliquer par des exemples.

Considérons d'abord le *problème des lumières* si connu en Algèbre.

On sait que ce problème consiste à trouver *sur la ligne qui joint deux lumières A et B d'intensités différentes* (figure 23) *le point où elles éclairent également.*

On arrive à ces équations simplifiées :

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ x = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \\[2ex] 2^\circ \ x = \dfrac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} a-x = \dfrac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \\[2ex] a-x = \dfrac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \end{array}\right.$$

où a est la distance AB des deux lumières, b l'intensité de la lumière A à l'unité de distance, c l'intensité de la lumière B à la même distance. C étant le point cherché, x représente la distance AC, d'où BC $= a - x$.

« Si, dit-on, dans ces équations, on suppose « $b = c$, les deux premières valeurs de x et de a « $- x$ se réduisent à $\frac{a}{2}$; ce qui donne le milieu de « AB pour le premier point également éclairé. Ce ré- « sultat est conforme à l'hypothèse. Les deux autres « valeurs se réduisent à $\frac{a\sqrt{b}}{0}$, ou deviennent *infi-*

« *nies;* c'est-à-dire que le second point également « éclairé est situé à une distance des points A et B « plus grande qu'aucune quantité assignable, ré- « sultat qui répond parfaitement à l'hypothèse pré- « sente. »

Pour moi, un tel résultat ne me paraît point *parfaitement répondre* à l'hypothèse dont il s'agit. Dans cette hypothèse, où les intensités de lumières b et c sont égales, il ne peut y avoir, sur la ligne où elles sont placées, qu'un seul point où elles éclairent également, point qui est le milieu de AB. Et, en effet, cela est confirmé par le véritable sens mathématique de $\frac{a \sqrt{b}}{o}$, qui exprime une impossibilité, une quantité absurde, et montre ici que le second point supposé n'existe pas. Il n'existe pas même à une distance infinie, à une distance plus grande que toute quantité assignable : c'est donc gratuitement et faussement qu'on interprète ici l'expression $\frac{a \sqrt{b}}{o}$ dans le sens de l'infini.

En disant que le second point également éclairé est situé à une distance infinie, ou plus grande qu'aucune quantité assignable, on entend, il est vrai, que cette distance infinie ne peut être atteinte, qu'ainsi en réalité le second point en question n'existe pas; mais on pense qu'il devrait exister si une distance infinie pouvait avoir lieu, et cela n'est pas admissible. Pourquoi d'ailleurs employer une locution contraire à la réalité? Pourquoi dire une chose pour en faire entendre une autre? Ce n'est pas ainsi que doit procéder le mathématicien. Il faut que ses expressions s'harmonisent avec ses pensées; autrement, il risque de n'être pas compris, et d'inculquer des idées fausses.

Maintenant je prends un exemple d'asymptotes, de celles relatives à la courbe dont l'équation est

$$y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}.$$

Soit BD (fig. 24) la ligne des abscisses, soit AD $= a$ la direction des positives, AB $= b$ la direction des négatives, le point A leur origine, EF l'axe des ordonnées. On a $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b + x}{a - x}\right)}$.

1° Il en résulte $y = o$, quand $x = o$: la courbe doit donc passer au point A. 2° On trouve, pour chaque valeur de x deux valeurs de y : il y a donc des ordonnées positives et des ordonnées négatives.

Pour déterminer les points où elles cessent d'être réelles, on prend x positive, mais moindre que a ou AD, et l'on a, pour y, deux valeurs PM, PM' qui croissent de plus en plus, jusqu'à ce qu'ayant prix $x = a$, elles deviennent

$$y = \pm x \sqrt{\frac{(b+x)}{o}}.$$

« Donc, a-t-on dit, elles deviennent infinies; il « faudrait les prolonger à l'infini pour qu'elles ren« contrassent les branches de la courbe. »

Je dirai d'abord que, quand même leur prolongation à l'infini serait possible, elles ne pourraient rencontrer les branches de la courbe supposées elles-mêmes prolongées à l'infini. Je ne saurais donc approuver la dernière proposition que je viens de rapporter.

De plus, la quantité $\pm x \sqrt{\frac{(b+x)}{o}}$ n'est pas infinie; elle est impossible, absurde; ce qui nous montre que GH ne peut rencontrer les branches de la courbe. En effet, les deux valeurs

$$\pm x \sqrt{\left(\frac{b+x}{a-x}\right)}$$

sont seulement celles des ordonnées y, c'est-à-dire des lignes qui, dans l'espèce, élevées perpendiculairement sur l'abscisse vont rencontrer la courbe. Or, par l'hypothèse de $x = a$, l'expression qui donne leur valeur devenant $\pm\, x \sqrt{\frac{(b+x)}{o}}$,

c'est-à-dire devenant absurde, il s'ensuit qu'elle n'exprime plus des ordonnées ; elle signifie que les perpendiculaires DH, DG élevées au point D ne peuvent rencontrer la courbe, quels que soient leur prolongement et celui de la courbe. Les lignes que l'on doit ici regarder comme ne pouvant atteindre le prolongement de la courbe, sont des lignes d'une longueur quelconque, indéterminée, et non pas spécialement des lignes infinies, qui d'ailleurs sont impossibles, et que par conséquent l'on ne doit pas supposer. Ces lignes indéterminées, qui sont les asymptotes, ne sont pas réellement représentées par

$\pm x \sqrt{\frac{(b+x)}{o}}$, qui n'exprime pas l'indétermination, mais une impossibilité, celle que je viens de dire.

On a défini l'asymptote, *une ligne qui n'est tangente à la courbe qu'à son extrémité infinie*. Cette définition est vicieuse : il y a évidemment contradiction dans les termes : *extrémité infinie*. *Extrémité*, en effet, signifie *fin*, point extrême, dernier ; *infini* signifie *sans fin*, qui n'a pas de terme, pas de point dernier. Les asymptotes sont des lignes indéterminées qui s'approchent autant que possible et de plus en plus de la courbe à laquelle elles appartiennent sans pouvoir jamais l'atteindre. Voilà ce qu'il faut dire. Évitons, je le répète, dans l'expression, tout ce qui pourrait embarrasser la pensée, fausser les idées.

Des cas de tangentes indéterminées donneraient lieu à des considérations analogues.

Prenons l'équation : $tang\ A = \frac{R \sin A}{\cos A}$.

Cette équation est celle de tangentes déterminées de l'arc A, de tangentes qui partent de l'extrémité d'un des rayons entre lesquels est compris cet arc, et se terminent au point où elles rencontrent le prolongement de l'autre rayon. Or, dans l'hypothèse où $A = 100°$, où par suite $\sin A = 1$ et $\cos A = o$, l'équation ci-dessus se réduit à $tang\ A = \frac{R}{o}$, et comme $\frac{R}{o}$ exprime une impossibilité, il s'ensuit que, dans l'hypothèse, l'arc A n'a pas de tangente déterminée comme le suppose l'équation. En effet, la ligne perpendiculaire qui est ici conçue à l'extrémité de l'un des rayons qui comprennent l'arc de 100°, étant parallèle à l'autre rayon, ne peut atteindre son prolongement, quel qu'il soit, et quelque prolongée qu'elle soit elle-même. C'est là ce que signifie mathématiquement, en ce cas, l'expression $\frac{R}{o}$; elle ne signifie pas que la tangente est *infinie*. La perpendiculaire qu'il y a lieu de considérer comme ne pouvant atteindre le prolongement d'un rayon, est une ligne indéterminée dans sa longueur; ce n'est point particulièrement une ligne *infinie*, qu'il ne faut pas même supposer, car une ligne infinie est inadmissible. Au reste, $\frac{R}{o}$ n'exprime pas vraiment la ligne quelconque, indéterminée, dont il s'agit, mais seulement l'impossibilité où est cette ligne de satisfaire à l'équation

$$tang\ A = \frac{R\ sin\ A}{cos\ A},$$

dans l'espèce.

Souvent on introduit dans une équation l'infini, en vue d'arriver à une solution que l'on regarde comme impliquant l'infinité. Ce procédé n'est pas légitime, l'on peut d'ailleurs en employer d'autres qui, rationnels, remplissent le but qu'on se propose, ou qu'on doit se proposer. Deux exemples suffiront pour rendre sensible la justesse de cette assertion.

Pour le premier exemple, je prends les asymptotes de la *quadratrice*.

L'équation de cette courbe, quand l'origine des abscisses se trouve au sommet A (figure 25), est

$$y = \frac{a - x}{a} \; tang \; \frac{cx}{a}.$$

En prenant des abscisses négatives AP′, et substituant leur valeur dans cette équation, elle deviendra

$$y = -\left(\frac{a + x}{a}\right) tang \; \frac{cx}{a},$$

ce qui donne des ordonnées négatives P′M′.

« Ainsi, dit-on, la courbe a une branche AM′
« dont on trouvera que la droite QN menée à la dis-
« tance AQ $= a$, est l'asymptote, en supposant y
« infinie; car alors on trouvera que $tang \; \frac{cx}{a} = \infty$,
« et que par conséquent $x = a$. »

Je représenterai ici que c'est encore à tort que l'on considère y comme infinie. Rien, d'ailleurs, n'exige qu'on fasse une telle supposition. Il suffit de regarder y comme nulle. En ce cas, en effet, $tang \; \frac{cx}{a}$, dans l'équation

$$y = -\left(\frac{a + x}{a}\right) tang \; \frac{cx}{a},$$

devra être nulle: ce qu'on obtiendra en prenant

$x = a$. La perpendiculaire que l'on concevra à la distance a prise pour abscisse, et qui ne saurait rencontrer la courbe, sera vraiment indéterminée : en réalité elle ne sera pas une ordonnée, pas une y, elle sera la limite des ordonnées ou des y. — Il est d'ailleurs visible, dans l'espèce, que moins l'abscisse x d'une ordonnée véritable P′M′ différera de a, plus cette ordonnée sera grande et plus aussi le point où elle atteindra la courbe sera distant de l'abscisse. La ligne indéterminée qui répond à $x = a$, et qui est la limite des ordonnées, devra donc s'approcher autant que possible et de plus en plus de la courbe sans jamais la toucher; elle sera donc une véritable asymptote de la quadratrice. Ainsi l'on obtiendra rationnellement un juste résultat[1].

1. Dans l'hypothèse d'une quantité infinie, il faudrait dévorer des anomalies, des impossibilités telles que celles-ci : $\infty = 2\infty = 1000\infty = \infty\infty$. Si une quantité quelconque d'objets était ajoutée à une quantité infinie d'objets, cette dernière quantité n'en recevrait aucune augmentation réelle; il en serait de même, si une quantité d'objets était retranchée d'une quantité infinie : ce retranchement ne saurait diminuer la quantitité infinie. Ainsi serait violé ce principe que *le tout est plus grand que sa partie.*

La supposition d'une quantité indéterminée n'entraînerait pas vraiment ces absurdités. L'on peut dire, il est vrai, qu'une quantité indéterminée en vaut plusieurs; qu'une telle quantité, plus ou moins une autre quantité, ne vaut ni plus ni moins qu'une quantité indéterminée; mais l'axiome : le tout est plus

Le dernier exemple que je vais présenter a trait aux asymptotes de l'hyperbole.

On a dit : « L'expression $\frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}$ de la sous-« tangente PT (fig. 26) de l'hyperbole, étant « retranchée de l'abscisse CP $= \alpha'$, on obtient :

$$CT = \alpha' + \frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'} = \frac{a^2}{\alpha'}.$$

« Lorsque l'abscisse α' devient infinie, cette va-« leur de CT se réduit à $\frac{a^2}{\infty} = o$.

« Donc alors la tangente passe par le centre.

grand que sa partie, ne s'applique qu'à des quantités supposées réelles. Or, une quantité indéterminée n'est pas conçue comme *réalité*. S'il y a une quantité réelle, elle n'est pas *quelconque*, ou celle qu'on voudra qu'elle soit. L'idée de l'indétermination, cependant, n'est pas irrationnelle : il n'est pas irrationnel d'admettre que, dans tel cas, on pourra prendre, supposer telle quantité qu'on voudra, et de représenter par quelque signe cette quantité *ad libitum*. L'on peut dire avec raison qu'une quantité indéterminée vaut deux, vaut plusieurs quantités de cette sorte, en ce qu'on peut supposer à la première une valeur égale à la somme de toutes les autres sans commettre aucune irrationalité. Mais il n'en est pas de même à l'égard de l'infini. Supposer infinie une quantité ou grandeur, c'est lui supposer une qualité qui devrait être réellement en elle, pour que la conception fût rationnelle. A ce point de vue, admettre que deux infinis n'en valent qu'un, que plusieurs quantités infinies d'objets n'en valent qu'une, c'est violer ce principe : le tout est plus grand que sa partie.

« Pour en déterminer la position, il faut encore un « autre point de sa direction : or la tangente trigono- « métrique de l'angle que la tangente de l'hyperbole « forme avec l'axe des abscisses, étant le coefficient « de x dans l'équation de la tangente, nous avons

$$\frac{b^2\alpha'}{a^2\beta}$$

« pour l'expression de cette tangente trigonomé- « trique. Si l'on y met la valeur de β tirée de « l'équation de l'hyperbole rapportée au centre, « cette expression devient

$$\pm \frac{b\alpha'}{a\sqrt{\alpha'^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{\alpha'^2}}},$$

« et lorsque $\alpha' = \infty$, se réduit à $\pm \frac{b}{a}$ (valeur de la « tangente trigonométrique cherchée). »

Et l'on a conclu que les droites passant par le centre et par les extrémités opposées des droites résultant de la construction de ces deux valeurs, doivent être les asymptotes de l'hyperbole.

Il y a dans la démonstration que je viens de reproduire un vice radical. Elle repose sur l'hypothèse de l'infini, sur cette donnée, qu'une quantité finie divisée par l'infini est nulle : principes faux, absurdes; elle ne vaut donc rien théoriquement.

L'on peut arriver rationnellement au résultat obtenu; voici comment j'y parviens.

Il est visible d'abord que, l'hyperbole étant rapportée au centre, plus l'abscisse sera grande, plus le point où la tangente touchera l'hyperbole sera éloigné de son sommet B.

Je vois ensuite, par l'expression $CT = \frac{a^2}{\alpha'}$, que plus l'abscisse α' est grande, plus CT doit diminuer, et plus par conséquent le point où la tangente de l'hyperbole rencontre l'axe des abscisses, doit se rapprocher du centre C, mais sans pouvoir jamais l'atteindre : le centre C est donc une limite des points tangentiels sur l'axe des abscisses.

Je vois de plus, par la formule

$$\pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{\alpha'^2}}},$$

expression de la tangente trigonométrique, que plus l'abscisse α' augmente, plus la partie $\frac{a^2}{\alpha'^2}$ diminue; que l'on peut supposer cette partie diminuant de plus en plus par l'accroissement de l'abscisse, et devenant aussi petite que l'on voudra, mais qu'elle doit toujours néanmoins avoir une certaine valeur pour que

$$\pm \frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{\alpha'^2}}}$$

soit l'expression complète de la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec l'axe des abscisses, par une tangente de l'hyperbole. Ainsi la partie $\pm \frac{b}{a}$ qui reste de la formule en négligeant la partie $\frac{a^2}{\alpha'^2}$, représente la limite de toutes les tangentes trigonométriques relatives aux tangentes de l'hyperbole.

Il résulte de ce qui précède que, si une ligne droite est menée du centre C, de telle sorte qu'elle fasse avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{b}{a}$, cette ligne sera la limite des tangentes de l'hyperbole ; elle sera aussi près que possible d'être une tangente de cette courbe, elle s'en approchera de plus en plus sans pouvoir jamais la toucher. On a donc ainsi une détermination rationnelle des asymptotes de l'hyperbole.

En algèbre, on regarde l'infini négatif comme le logarithme de o, parce que $o = a^{-\infty}$

donne $o = \frac{1}{a^{\infty}}$, équation qu'on admet, en considérant $\frac{1}{a^{\infty}}$ comme exprimant un infiniment petit.

La science rejettera ces fausses notions. L'équation $o = \frac{1}{a^{\infty}}$ n'est pas acceptable, car $o \times a^{\infty}$ ne saurait égaler 1. Il n'y a pas d'infiniment petit; o n'exprime pas un infiniment petit; o n'a pas, ne peut avoir de logarithme, car o ne saurait être un terme d'une progression géométrique.

Si l'on a une expression de la forme $a^{-\frac{A}{0}}$, on devra l'interpréter dans le sens de l'imposibilité, et l'on aura ainsi une solution rationnelle.

En résumé, l'on n'est jamais en droit de supposer infinies les expressions de la forme $\frac{A}{o}$; la supposition et l'introduction de l'infini dans les spéculations a pour effet de les vicier théoriquement, et il est alors de justes procédés, des voies rationnelles pour arriver aux solutions proposées. Tout se réunit donc pour engager les algébristes à répudier théoriquement l'infini, et à rendre à la forme $\frac{A}{o}$ sa véritable signification.

Les quantités irrationnelles, les quantités imaginaires, et les quantités de la forme $\frac{A}{o}$ sont toutes impossibles ; mais elles le sont relativement ou absolument, d'une manière plus ou moins essentielle, à des points de vue très-différents. Il est donc convenable de les dénommer différemment.

Les mots *irrationnelle*, *imaginaire*, me paraissent convenables pour exprimer les deux premières sortes de quantités. Quant à celles de la forme $\frac{A}{o}$, au lieu de dire qu'elles sont infinies, qualification inadmissible, on peut se borner à dire qu'elles sont *impossibles*, *absurdes ;* on peut dire qu'elles expriment l'impossibilité, l'absurdité mathématique.

CHAPITRE VIII

DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

En Algèbre, on admet ou suppose des quantités négatives. On donne spécialement cette dénomination à des quantités précédées du signe —, du signe qui indique la soustraction, prises avec ce signe isolément, abstraction faite d'autres quantités. En ce sens, $-a$, $-4b$, $-3b^2$, sont des *quantités négatives*.

Cette conception a soulevé de longues et vives controverses, auxquelles ont pris part les sommités mathématiques, notamment Leibnitz, Bernouilli, Euler et Dalembert. Les uns ont soutenu la réalité des quantités négatives, ont même été jusqu'à soutenir leur homogénéité avec les positives. D'autres ont nié leur réalité, et faisant ressortir les paradoxes, les contradictions qui leur paraissaient naître de l'hypothèse de ces bizarres quantités, ont conclu qu'il fallait les bannir de la science.

Ceux qui se sont prononcés pour l'hypothèse des quantités négatives ont admis que ces quantités étaient moindres que zéro.

Les questions relatives aux quantités négatives ont été de nouveau remuées par M. Busset, dans le mémoire dont j'ai parlé plus haut. Il y critique vivement l'opinion de ceux qui ont vu des entités, des quantités réelles dans les expressions dont il s'agit; il attribue leur erreur à ce qu'ils regardent les chiffres, les signes employés en mathématiques comme des nombres réels : considérant 2, 3, 4, 5, etc., non pas seulement comme des expressions de nombre, mais comme des nombres réels, ils sont, pense-t-il, conduits, par analogie, à regarder — 2, — 3, — 4, — 5, etc., comme étant aussi des nombres, et les premiers étant positifs, les autres doivent, logiquement, être négatifs.

M. Busset rappelle les principales objections qu'on a élevées contre les quantités négatives.

Ainsi Dalembert, pour combattre cette notion, que les expressions négatives sont des quantités moindres que 0, raisonne ainsi : « Soit, dit-il, cette « proportion 1 : — 1 : : — 1 : 1. Si la notion com- « battue était exacte, c'est-à-dire si — 1 était « moindre que 0, à plus forte raison serait-il « moindre que 1; donc le second terme de cette « proportion serait moindre que le premier; donc le « quatrième devrait être moindre que le troisième,

« c'est-à-dire que 1 devrait être moindre que — 1 ;
« donc — 1 serait tout ensemble moindre et plus
« grand que 1 : ce qui est contradictoire. »

Carnot repousse cette même notion par plusieurs arguments que voici :

« Je dis d'abord que cette notion est absurde, et
« pour la détruire, il suffit de remarquer qu'étant
« en droit de négliger dans un calcul les quantités
« nulles, par comparaison à celles qui ne le sont pas,
« à plus forte raison devrait-on être en droit de né-
« gliger celles qui se trouveraient moindres que 0,
« c'est-à-dire les quantités négatives; ce qui est
« certainement faux : donc les quantités négatives
« ne sont pas moindres que 0.

« Une multitude de paradoxes, ou plutôt d'absur-
« dités palpables, résulteraient de la même notion,
« Par exemple, — 3 serait moindre que 2 ; cependant
« $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2, puisque $(-3)^2$
« est 9, et que 2^2 n'est que 4 ; c'est-à-dire qu'entre
« ces deux quantités inégales, 2 et — 3, le carré
« de la plus grande serait moindre que le carré de
« la plus petite, et réciproquement : ce qui choque
« toutes les idées claires qu'on peut se former de la
« quantité. »

Je dois aussi le tribut de mes réflexions sur cette grave question, que je ne considère pas comme complétement approfondie et résolue.

Certes, et bien évidemment, les chiffres, tels que 2, 3, 4, 5, etc., ne sont pas des nombres réels, mais seulement des signes de nombres; mais, je l'ai déjà dit, je crois que M. Busset est dans l'erreur quand il reproche aux mathématiciens de l'école d'avoir considéré ces signes comme des réalités numériques. La question n'est pas là, elle est plus profonde. Étant reconnu que 2, 3, 4, 5, etc., ne sont que des signes, il s'agit de savoir si — 2, — 3, — 4, — 5, etc., expriment vraiment des nombres, des quantités *négatives*. Ici encore, je n'hésite pas à trancher la question : ces expressions — 2, — 3, — 4, etc., ne représentent point vraiment des quantités, des nombres; elles expriment, signifient seulement que la quantité 2, ou 3, ou 4, etc., doit être soustraite; elles indiquent une soustraction à opérer. Mais il est visible que, dans l'analyse algébrique, on opère souvent comme si ces expressions étaient celles de quantités réelles.

Zéro, évidemment, n'est pas un nombre, il n'exprime pas une quantité réelle; ce chiffre exprime au contraire l'absence de toute quantité quelconque; mais dès lors qu'on lui fait jouer le rôle de quantité dans le calcul, et qu'on le met fictivement en rapport avec les quantités fictives, — 1, — 2, — 3, — 4, etc., la logique veut que l'on regarde 0 comme excédant — 1, — 2, — 3, etc.

Soit la suite ÷ 5. 4. 3. 2. 1. 0. — 1. — 2. — 3... Il est certain que, arithmétiquement, logiquement, d'après le système numérique admis, cette suite est en progression continue décroissante. Il faut donc ici regarder — 1 comme plus petit d'une unité que 0, — 2 comme plus petit de deux unités que 0, et ainsi de suite. Les quantités négatives devraient donc être moindres que zéro, que rien, ce qui est évidemment inadmissible, contraire à la raison.

Les critiques de Dalembert et de Carnot, que j'ai rapportées, sont justes : elles constatent des contradictions, des paradoxes, dans les conséquences qu'entraîne l'hypothèse des quantités négatives.

D'ailleurs, 1 n'est point à — 1 comme — 1 est à 1; pourtant cette proportion devrait exister pour qu'on pût avoir $-1 \times -1 = 1$, car, d'après la notion de la multiplication, le produit doit contenir le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, ou, pour plus de généralité, le produit doit être au multiplicande comme le multiplicateur est à l'unité. Il est certain que — 1 devrait être moindre que zéro, et *a fortiori* moindre que 1; que par conséquent il faudrait, pour que la proportion fût juste, que, dans le second membre, 1 fût moindre que — 1. La contradiction serait flagrante.

Il est certain que la raison ne saurait non plus admettre que deux quantités supposées égales puissent être telles que le carré de la moindre de ces quantités soit plus grand que le carré de la plus grande, et que pourtant cette absurdité serait la conséquence de l'hypothèse des quantités négatives. Il y a ici une antinomie palpable.

L'autre objection de Carnot est également fondée.

Ces anomalies condamnent la théorie des quantités négatives.

Pour la justifier, l'on a fait de grands efforts. L'on s'est ingénié à prouver la justesse des spéculations concernant les quantités négatives, soit par des procédés directs, soit par des inductions tirées des opérations régulières et incontestées où figurent des quantités réelles précédées du signe —, mais non considérées isolément avec ce signe.

Ainsi l'on a dit : « A l'égard de la multiplication, « on remarquera que le produit de $a - a$ par $+ b$, « doit être $ab - ab$, parce que le multiplicande « étant égal à zéro, le produit doit aussi être zéro ; « et le premier terme étant ab, le second doit né- « cessairement être $- ab$, pour détruire ce premier. « On conclura de là que $- a$ multiplié par $+ b$ « doit donner $- ab$.

« En multipliant a par $b - b$, on aura encore « $ab - ab$, parce que le multiplicateur étant égal à

« zéro, le produit sera aussi égal à zéro ; et il faudra « par conséquent que le second terme soit — *ab* « pour détruire le premier + *ab*. Donc + *a* mul- « tiplié par — *b* doit donner — *ab*.

« Enfin si l'on multiplie — *a* par *b* — *b*, le pre- « mier terme du produit étant, d'après ce qui pré- « cède, — *ab*, il faudra que le second terme soit « + *ab*, puisque le produit doit être nul en même « temps que le multiplicateur. Donc — *a* multiplié « par — *b* doit donner + *ab*. »

Je ne conteste pas la force de ces raisonnements ; ils prouvent que si l'on pouvait envisager des expressions algébriques précédées du signe —, comme des quantités réelles, et les soumettre aux opérations que comportent des quantités réelles, les multiplications où figureraient des quantités négatives devraient, à part toute autre considération, donner les résultats qu'on leur attribue ; mais les quantités négatives sont évidemment chimériques, et l'hypothèse de telles entités mène à l'absurde.

Au reste, l'on n'a pas été toujours aussi logique dans les arguments allégués en faveur des règles relatives aux quantités négatives[1], mais tout ce qu'on

[1] Ainsi, après avoir démontré logiquement que le produit de *a* — *b* par *c* — *d* est *ac* — *bc* — *ad* + *bd* : résultat incontestable et incontesté, on en a conclu que le produit de — *b* × — *d* doit être + *bd*. Or, cette conclusion n'est pas légitime ;

a invoqué, tout ce qu'on pourrait invoquer de plus démonstratif dans l'intérêt de ces règles, prouverait seulement qu'elles sont justes, à certains points de vue. Il resterait toujours contre elles cette fin de non-recevoir motivée sur ce qu'elles supposent réelles des quantités absurdes, et qu'elles se trouvent, dans leurs conséquences, en flagrant désaccord avec des principes incontestablement rationnels.

S'ensuit-il que ces règles doivent absolument disparaître des livres de mathématiques, et cesser d'être appliquées? Non. Elles conduisent à des résultats exacts, et elles facilitent singulièrement les calculs. L'on peut d'ailleurs comprendre que, par cette voie irrationnelle, on doit arriver à des solutions vraies, et s'y engager ensuite avec une entière confiance. Que la pratique continue donc à opérer, comme devant, à l'endroit des quantités négatives, mais que le théoricien, le professeur, proclament que de telles quantités sont chimériques, ne sont admissibles que pour les besoins du calcul; qu'ils fassent ressortir les anomalies, les paradoxes que renferme la théorie de ces quantités. Alors qui pourra crier à l'absurde? Qui fuira l'étude des ma-

elle ne peut se fonder sur ce que $+ bd$ figure dans le produit de $a - b$ par $c - d$; car le produit partiel $+ bd$ se lie, dans la démonstration, à la considération de tous les éléments du multiplicande et du multiplicateur.

thématiques, repoussé par l'irrationalité de cette doctrine?

M. Busset, pour montrer la non-réalité des quantités négatives, se livre à des conceptions qui me paraissent très-hasardées. Il fait une excursion dans les différents systèmes d'écriture. Ainsi, observant que les Européens écrivent de gauche à droite, il en conclut que dès lors, pour eux, « l'expres- « sion numérique d'une ligne droite mathématique « a la double représentation indiquée (figure 27) par les flèches $0\ 0_1\ 0_1 0$.

« Les anciens Égyptiens, les Hébreux, les Phé- « niciens, les Chaldéens, les Syriens, les Arabes, les « Persans, etc., écrivent de droite à gauche; et dès « lors leur notation est tout à fait opposée à la « nôtre; elle en est le renversement complet.

Pour le rendre sensible, M. Busset divise une ligne en un certain nombre de parties, notées et correspondantes aux nombres naturels (figure 28), suivant la notation de gauche à droite, et (figure 29) selon la notation arabe, où le point de départ est à droite, mais M. Busset le transporte à gauche avec le signe —.

L'auteur, d'après ces considérations et plusieurs autres de cet ordre, émet ces conclusions :

« 1° Certains peuples voient les quantités dites *né- « gatives* où d'autres placent les quantités *positives*.

« L'appellation *quantité négative* n'est qu'une « expression grammaticale pour caractériser des « faits distincts qui peuvent être dans les mêmes « conditions numériques, bien que placées dans des « régions différentes. »

Je ne puis accepter ces conclusions, qui ne donnent point une idée exacte de ce que signifient vraiment, dans bien des cas, les expressions de la forme — 2, — 3, — 4, etc. En géométrie, les grandeurs dites négatives ne diffèrent des positives que par leur situation; mais les quantités dites négatives expriment souvent une soustraction réelle à opérer et non point toujours une simple opposition de lieu, de position. Les grandeurs géométriques dites négatives sont elles-mêmes traitées, dans les calculs, comme le sont les autres quantités soumises au signe de la soustraction, et c'est afin de pouvoir les traiter ainsi, qu'on leur a appliqué ce signe.

Ces conceptions de M. Busset ne sauraient donc jeter aucune lumière sur la question. Les oppositions qu'il signale dans les systèmes d'écriture des peuples ne peuvent servir à résoudre la difficulté soulevée par l'hypothèse des quantités négatives.

CHAPITRE IX

DE LA MÉTHODE D'EXHAUSTION. — DE LA SOMMATION D'UNE PROGRESSION INFINIE PAR QUOTIENT. — DE LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES ET DE L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS. — D'UN AUTRE PROCÉDÉ DE CALCUL INFINITÉSIMAL.

La méthode d'exhaustion ou des limites (on lui a donné ces deux noms) était fort pratiquée par les anciens géomètres. En voici quelques exemples :

Voulait-on prouver que le cercle est égal au rectangle de la moitié de la circonférence par le rayon (théorème qui ne peut être fondé), on commençait par montrer qu'on peut inscrire ou circonscrire au cercle un polygone tel que sa différence avec le cercle soit moindre qu'aucune quantité donnée ; puis on raisonnait ainsi :

« Puisque l'on veut que le cercle ne soit pas égal « au demi-rectangle de la circonférence par le rayon, « il est donc plus grand ou moindre, et cela d'une « certaine quantité que nous nommerons A. Supposons-la d'abord moindre. Qu'on inscrive à ce « cercle un polygone qui n'en diffère que de moins « que la quantité A. Puisque le rectangle de la « demi-circonférence par le rayon est surpassé par « le cercle de la quantité A, et que le polygone n'est

« surpassé par le cercle que de moins que cette « quantité A, le rectangle de la demi-circonférence « par le rayon est moindre que le polygone inscrit. « Mais ce polygone inscrit est le produit de deux « lignes moindres que les côtés du rectangle précé- « dent. Il y a donc de l'absurdité dans cette suppo- « sition, et par conséquent le cercle ne saurait être « moindre que le rectangle de la demi-circonférence « par le rayon. On démontre par un procédé sem- « blable, qu'il ne saurait être plus grand : il lui est « donc égal. »

Voici un autre exemple que je tire des œuvres d'Archimède : c'est sa fameuse démonstration relative à la quadrature de la parabole.

Il se proposa de démontrer qu'un segment quelconque compris par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

Pour y parvenir, le grand géomètre démontre d'abord aisément et rigoureusement, 1° que *si l'on a un segment compris par une droite et par une parabole; si des surfaces en aussi grand nombre que l'on voudra sont placées à la suite les unes des autres; si chacune d'elles contient quatre fois celle qui la suit immédiatement, et si la plus grande de ces surfaces est égale à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, la somme de toutes* *ces surfaces sera plus petite que le segment;* 2° *que si tant de grandeurs que l'on voudra sont placées à la suite les unes des autres, et si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, la somme de ces grandeurs, conjointement avec le tiers de la plus petite, est égale à quatre fois le tiers de la plus grande.*

Puis, il raisonne ainsi :

« Soit ΑΔΒΕΓ (fig. 30) un segment compris par « une droite et par une parabole. Soit aussi un « triangle ΑΒΓ qui ait la même base et la même « hauteur que le segment. Que la surface Κ soit « égale à quatre fois le tiers du triangle ΑΒΓ. Il faut « démontrer que la surface Κ est égale au segment « ΑΔΒΕΓ.

« Car si la surface Κ n'est pas égale au segment « ΑΔΒΕΓ, elle est ou plus grande ou plus petite. « Supposons d'abord, si cela est possible, que le « segment ΑΔΒΕΓ soit plus grand que la surface Κ. « Inscrivons les triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, comme il a été « dit (21) (c'est-à-dire des triangles qui aient la « même base et la même hauteur que les segments « respectifs). — Inscrivons dans les segments res- « tants d'autres triangles qui aient la même base « et la même hauteur que ces segments, et conti- « nuons d'inscrire dans les segments restants deux « triangles qui aient la même base et la même hau-

« teur que ces segments. La somme des segments « restants sera certainement plus petite que l'excès « du segment AΔBEΓ sur la surface K. Donc le po- « lygone inscrit sera plus grand que la surface K. « Ce qui ne peut être. En effet, le triangle ABΓ étant « quadruple de la somme des triangles AΔB, BEΓ, la « somme de ceux-ci quadruple de la somme de ceux « qui sont inscrits dans les segments suivants, et « ainsi de suite, des surfaces sont placées les unes « à la suite des autres, et chacune d'elles contient « quatre fois celle qui suit immédiatement. D'où il « suit que la somme de toutes ces surfaces est plus « petite que quatre fois le tiers de la plus grande de « ces surfaces. — Mais la surface K est égale à quatre « fois le tiers de cette surface; donc le segment « AΔBEΓ n'est pas plus grand que la surface K.

« Supposons à présent, si cela est possible, que « le segment AΔBEΓ soit plus petit que la surface K; « que le triangle ABΓ soit égal à la surface Z; que « la surface H soit le quart de la surface Z; que la « surface Θ soit le quart de la surface H et ainsi de « suite, jusqu'à ce que la dernière surface soit plus « petite que l'excès de la surface K sur le segment; « que cette dernière surface soit I : la somme des « surfaces Z, H, Θ, I, conjointement avec le tiers « de la surface I, est égale à quatre fois le tiers de « la surface Z. Mais la surface K est égale à quatre

« fois le tiers de la surface Z; donc la surface K est « égale à la somme des surfaces Z, H, Θ, I, con« jointement avec le tiers de la surface I. Mais l'excès « de la surface K sur la somme des surfaces Z, H, « Θ, I est plus petite que la surface I, et l'excès de « la surface K sur le segment est plus grand que la « surface I; il est donc évident que la somme des « surfaces Z, H, Θ, I est plus grande que le seg« ment. Ce qui ne peut être; car on a démontré que « si des surfaces en aussi grand nombre qu'on vou« dra, sont placées les unes à la suite des autres, si « chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit « immédiatement, et si la plus grande de toutes est « égale au triangle inscrit dans le segment, la « somme de ces surfaces est plus petite que le seg« ment. Donc le segment AΔBEΓ n'est pas plus petit « que la surface K. Mais nous avons démontré qu'il « n'est pas plus grand; donc il est égal à la surface « K. Mais la surface K est égale à quatre fois le « tiers du triangle ABΓ; donc le segment AΔBEΓ « est égal à quatre fois le tiers du triangle ABΓ. »

Cette démonstration est logique; elle prouverait ce qu'il s'agit de prouver, si elle ne reposait pas sur une fausse supposition, celle de rapport de quantité entre des courbes et des droites, entre des surfaces ou solides hétérogènes par leurs figures, leurs formes.

Le raisonnement d'Archimède démontre, en effet, que le segment de parabole proposé ne saurait être ni plus grand ni plus petit que quatre fois le tiers du triangle de même base et de même hauteur.

Il ne s'ensuit pas que ces grandeurs sont égales, sont équivalentes, mais il en résulte que l'une d'elles, quelques formes qu'elles pussent recevoir, par la disposition de leurs parties, ne saurait entièrement contenir l'autre : l'une serait nécessairement dépassée par l'autre en quelque partie, tandis qu'elle la dépasserait ailleurs.

La méthode d'exhaustion est souvent appliquée par Euclide et Archimède ; c'est ce procédé que ce dernier emploie pour démontrer que le conoïde parabolique est les $\frac{3}{2}$ du cône de même base et de même sommet ; cette démonstration serait complète s'il pouvait y avoir un rapport de quantité entre les grandeurs dont il s'agit, mais elle est sans base, par l'impossibilité de ce rapport.

Les démonstrations obtenues par la méthode d'exhaustion ont d'ailleurs l'inconvénient d'être généralement trop longues, trop compliquées, et difficiles à saisir.

Les mathématiciens, après avoir sommé des suites ou séries finies, ont voulu opérer la sommation de séries infinies, de progressions décroissantes par quotient, auxquelles ils supposaient une infinité de termes.

Je vais présenter les principaux procédés qu'ils ont appliqués à cette sorte de sommation, et discuter ensuite leur valeur aux points de vue théorique et pratique.

1° On a dit :

« Soit $\div\!\!\div \frac{d}{b} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^4} \ldots\ldots\ldots : \frac{d}{bq^\infty}$,

« une progression infinie décroissante (en supposant q plus grand que l'unité). Si on l'écrit dans « un ordre inverse,

$$\div\!\!\div \frac{d}{bq^\infty} \ldots\ldots \frac{d}{bq^4} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{b},$$

« on la rendra croissante, et en y appliquant la formule ..... $S = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, qui est celle exprimant « la somme des termes d'une progression géométrique quelconque, dont on connaît le premier « terme a, le dernier ω, et le quotient q, on aura « ainsi $a = \frac{d}{bq^\infty}$, $\omega = \frac{d}{b}$, et par conséquent

$$S = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q - 1};$$

« négligeant ensuite le terme infiniment petit $\frac{d}{bq^{\infty}}$, « et réduisant, on trouvera $S = \frac{dq}{bq - b}$; formule « propre à donner la somme de toute progresion « géométrique décroissante à l'infini.

« Exemple : Soit à sommer la progression « $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots\ldots\ldots \frac{3}{10^{\infty}}$. Si on écrit d'a- « bord cette progression de manière à la rendre « croissante, on aura $\frac{3}{10^{\infty}} \ldots\ldots \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$; « et si l'on fait ensuite les substitutions convenables « dans la formule $S = \frac{dq}{bq - b}$, c'est-à-dire si l'on y « fait $d = 3$, $b = 10$, $q = 10$, on trouvera que « $S = \frac{30}{100 - 10} = \frac{1}{3}$. Donc la somme de la progres- « sion $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots\ldots\ldots \frac{3}{10^{\infty}}$ est égale à « $\frac{1}{3}$. Et, en effet, ajoute-t-on, la fraction $\frac{1}{3}$ peut être « transformée par approximation en celle-ci : « 0,3333, etc., qui, en poussant l'approximation « jusqu'à l'infini, doit donner $\frac{1}{3}$. »

2° Procédant un peu différemment, on a dit encore :

« Soit une progression décroissante par quotient « d'un nombre indéfini de termes : si l'on considère « la formule $S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$, où a représente le pre- « mier terme, q le quotient, et qui donne la somme « d'un nombre n de termes, elle peut être mise sous « la forme $S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$. Or, puisque la pro- « gression est décroissante, q est une fraction ; q^n est « aussi une fraction, qui sera d'autant plus petite « que n sera plus grand ; ainsi, plus on prendra de « termes dans la progression, plus $\frac{a}{1 - q} \times q^n$ di- « minuera ; plus par conséquent la somme partielle « de ces termes approchera de devenir égale à la « première partie de S, c'est-à-dire à $\frac{a}{1 - q}$. Enfin, « si l'on prend pour n un nombre plus grand qu'au- « cune grandeur donnée, ou si l'on suppose $n = \infty$, « $\frac{a}{1 - q} \times q^n$ sera moindre qu'aucune grandeur « donnée, ou deviendra égale à 0 ; et l'expression « $\frac{a}{1 - q}$ représentera la valeur de toute la série.

« D'où l'on peut conclure que *la somme des*

« *termes d'une progression décroissante à l'infini*, *a*
« *pour expression :*

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

« C'est, à proprement parler, la limite vers la-
« quelle tendent sans cesse les sommes partielles que
« l'on obtient en prenant un nombre de termes de
« plus en plus grand dans la progression. La diffé-
« rence entre ces sommes et $\frac{a}{1 - q}$ peut devenir
« aussi petite que l'on veut, et *ne devient tout à fait*
« *nulle, que lorsque l'on prend un nombre infini de*
« *termes.*

« Application. Soit la progression décroissante à
« l'infini

$$1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \ldots\ldots\ldots$$

« On a, pour l'expression de la somme des termes :

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

« Soit encore la progression à l'infini

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{« On a } S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2. \text{ »}$$

3° On est arrivé directement à l'expression $S = \frac{a}{1-q}$, de l'une des manières suivantes :

On a dit : « Soit la progression $\div a : b : c : d :$ « $e : f : g : \ldots\ldots\ldots$ On a, q étant le quotient, « $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, etc., dont le « nombre est ici indéfini ; et, en les ajoutant membre « à membre, il vient

$$b + c + d + e + \ldots = (a + b + c + d + \ldots)\,q.$$

« Or, le premier membre est évidemment la « série proposée, diminuée du premier terme a, et « par conséquent il a, pour expression, $S - a$; le « second membre est égal à q multiplié par la série « tout entière, *puisqu'il n'y a pas de dernier terme,* « *ou que ce dernier terme est nul;* l'expression de ce « second membre est donc qS, et l'égalité ci-dessus « devient

$$S - a = qS, \text{ d'où l'on déduit } S = \frac{a}{1-q}.$$

« En effet, si l'on développe $\frac{a}{1-q}$ en série, par « le procédé de la division, on trouve le résultat « indéfini, $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$, qui n'est

« autre chose que la série proposée, lorsqu'on y « remplace b, c, d .... par des valeurs en fonction « de a. »

Ou bien encore on a fait ce raisonnement :

« Soit la progression $\div\!\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots$ et « posons $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots$

« D'où, multipliant les deux membres par q,

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots$$

« Retranchons cette dernière équation de la pré- « cédente, membre à membre, il vient

$$S - qS = a;\ \text{donc enfin, } S = \frac{a}{1-q}.\ \text{»}$$

Maintenant voici le jugement que je crois devoir porter sur ou plutôt contre ces spéculations.

D'abord un nombre infini est impossible, il ne saurait y avoir une infinité de termes dans une progression, soit croissante, soit décroissante, dans une série ou suite quelconque. Alors même qu'il pourrait y avoir un nombre infini de termes, on ne saurait en opérer la sommation, trouver une expression complète de la somme de ses termes; car toute expression, tout nombre qu'on pourrait produire, concevoir, exprimer, serait fini; or, la somme d'un nombre infini de valeurs, de quantités même décroissantes, ne saurait être une quantité *finie*. Il est vrai que, pour la somme d'une telle progression, il y aurait toujours une limite, en ce sens qu'il y aurait une quantité finie qu'elle ne pourrait jamais atteindre. Que l'on dise, à ce point de vue, que cette somme ne serait pas *infinie*, pour marquer qu'elle serait contenue dans une quantité finie ; soit ; mais on peut dire et il faut reconnaître que, bien que contenue dans une quantité finie, elle ne serait pas finie. Cette considération suffirait pour convaincre de l'irrationalité de la sommation dont il s'agit ; car les expressions ci-dessus, qu'on trouve pour la somme d'une progression par quotient décroissante à l'infini, sont toutes des expressions de quantités finies.

Il n'est pas mathématique d'admettre que, dans l'expression $\dfrac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^{\infty}}}{q-1}$, $\dfrac{d}{bq^{\infty}}$ exprime un infiniment petit, comme on le suppose dans la théorie du n° 1er ci-dessus. C'est, je l'ai montré précédemment, une expression absurde, comme toute expression de la forme $\dfrac{A}{\infty}$, ∞ exprimant l'infini, et A une quantité finie. Même, en supposant, dans l'expression $\dfrac{a}{1-q}q^n$ de la théorie du n° 2, que n soit infini, et q une fraction, il n'est pas mathématique d'admettre que q^n est égal à 0. La raison ne peut encore voir ici qu'une expression impossible, qu'une absurdité. q^n n'exprimerait pas même un infiniment petit; car l'infiniment petit devrait avoir le dernier degré de petitesse; or, dans l'hypothèse d'une fraction élevée à une puissance infinie, le résultat de cette monstrueuse puissance ne saurait offrir un degré fixe, déterminé de petitesse, conséquemment présenter un dernier degré sous ce rapport. D'ailleurs un infiniment petit ne serait pas égal à 0, qui n'est rien.

Même en supposant l'infinité du nombre des termes de la progression décroissante dont il s'agit, jamais la somme ne pourrait atteindre la valeur indiquée par l'expression $\frac{dq}{bq - b}$, ou par l'expression $\frac{a}{1 - q}$. On conçoit seulement que, par une addition successive des termes de la progression, on obtienne des sommes qui approchent toujours de plus en plus de l'une ou de l'autre de ces expressions, mais sans pouvoir jamais y parvenir. Il n'est point vrai, par exemple, que la somme de cette progression $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} : \ldots\ldots$ supposée continuée à l'infinie, s'élève à $\frac{1}{3}$; que, ce qui revient au même, la fraction décimale 0,3333, etc., ainsi continuée à l'infini, soit égale à $\frac{1}{3}$. Supposez une infinité de 3 à la suite les uns des autres, aux décimales, jamais cette quantité absurde n'atteindra la limite $\frac{1}{3}$. Cela n'est pas plus admissible qu'il ne l'est que l'asymptote prolongée à l'infini atteindra la courbe dont elle s'approche de plus en plus. A cet égard, il y a évidence de raison.

Il est vrai que l'on arrive, par une voie directe, à l'égalité $S = \frac{a}{1-q}$, ainsi qu'on l'a vu plus haut; mais qu'en faut-il conclure? C'est que, si l'on fait une supposition absurde, la raison, à divers points de vue de ce qui est absurdement supposé, peut tirer des conclusions contradictoires. C'est ce qui arrive ici, où l'on suppose l'infini, une infinité de termes dans la progression. La raison voit certainement, par intuition directe, que, dans le cas d'une progression décroissante par quotient, cette progresssion eût-elle un nombre infini de termes, la somme de ces termes ne saurait atteindre la quantité exprimée par $\frac{a}{1-q}$; que, par exemple, si la la progression est $\div\div 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \ldots\ldots$, la somme des termes, même supposés infinis en nombre, ne s'élèvera pas à la quantité $1\frac{1}{3}$, bien qu'elle doive s'approcher de plus en plus de cette limite. A un autre point de vue, celui où l'on opère par le mode direct que j'ai reproduit, le résultat mathématique de cette opération autoriserait à conclure que la quantité exprimée par $\frac{a}{1-q}$ est égalée par la somme des termes de la progression infinie. Le raisonnement mène donc à un résultat contraire à ce que la raison aperçoit par voie de déduction. Mais ce n'est point là un motif pour douter de la raison. Ce n'est point la seule antinomie rationnelle qui se produise, soit en mathématiques, soit en métaphysique[1]. Restez dans le vrai, et la raison s'accordera toujours avec elle-même : l'absurde seul peut mener à la contradiction rationnelle; mais alors la raison se place à divers points de vue, et ainsi ce n'est pas elle qui est en faute, c'est le sujet, c'est l'hypothèse qu'elle juge : on ne doit donc voir dans une antinomie de ce genre qu'un motif pour rejeter cette hypothèse prise, pour ainsi dire, en flagrant délit de contradiction, d'absurdité.

Si l'on admet que la somme de la progression infinie peut atteindre la totalité de la valeur exprimée

1. Voir l'exposé de mon *Système philosophique*.

par $\frac{a}{1-q}$, c'est qu'on suppose que les termes, par leur multiplication à l'infini, vont au point que la progression a pour dernier terme 0. Or cela ne saurait être dans l'hypothèse d'une infinité de termes attribués à la progression, puisque, dans cette hypothèse, il n'y a pas de dernier terme. Quand même il y aurait un dernier terme, il ne serait pas 0 ; car quel que fût le terme précédant celui-ci, il y aurait, entre lui et 0, d'autres quantités, une infinité de quantités pouvant entrer dans la progression. — Supposons, d'ailleurs, un dernier terme 0 ; le rapport du précédent avec ce dernier terme serait de la forme $\frac{A}{0}$, expression absurde qui ne saurait être un rapport mathématique et conséquemment serait incompatible avec la progression ; et si l'on regardait cette expression comme celle de l'infini, interprétation fausse mais généralement admise, on devrait encore, logiquement, en conclure que le rapport $\frac{A}{0}$ ne pourrait entrer dans la progression, dont le rapport est supposé *fini*.

Dira-t-on qu'il ne faut pas prendre le mot *infini* dans un sens absolu ; que, par un nombre infini de termes, il faut entendre un nombre fini mais plus grand que tout nombre assignable, un nombre tellement grand que la quantité $\frac{a}{1-q} \times q^n$ devient plus petite qu'aucune quantité donnée, et peut ainsi, sans erreur appréciable, être envisagée comme nulle par suite de la grandeur supposée à n.

Je réponds qu'il ne peut y avoir un nombre plus grand, ni plus petit que tout nombre assignable. Quant à supposer n tellement grand que la valeur de $\frac{a}{1-q} \times q^n$ puisse être, *sans erreur appréciable*, envisagée comme nulle, il faut distinguer.

S'il ne s'agit, dans l'application d'une sommation de série décroissante par quotient, que d'obtenir une approximation, un résultat à peu près exact, aussi exact qu'on peut le désirer dans la pratique, je comprends très-bien que l'on néglige la partie $\frac{a}{1-q} \times q^n$, et que l'on regarde $\frac{a}{1-q}$ comme l'expression de la somme de la série entière ; mais, s'il s'agissait, non pas seulement d'arriver à une approximation, mais de fonder sur la sommation une démonstration, une conclusion énonçant un résultat absolu rigoureux, complétement exact, oh ! alors, l'on ne pourrait plus se permettre de supprimer la partie en question, car il pourrait toujours être objecté que, sans cette mutilation, l'on ne serait pas arrivé au résultat obtenu. Si vous fondez un raisonnement, une démonstration, sur une valeur qui n'est qu'approximative, qui est incomplète, quelque legère que soit l'erreur, elle infirme, elle vicie toutes les conclusions que vous pourrez en tirer : le raisonnement croule faute d'une base irréfragable.

Au reste, si en vue d'obtenir un résultat approximatif, on veut ne tenir aucun compte de la partie $\frac{a}{1-q} \times q^n$, il n'est nullement nécessaire, aucunement utile, pour cela, de supposer que n est infini, que q^n est infiniment petit; de se livrer, en un mot, aux spéculations si contraires à la raison que je viens de critiquer, et au moyen desquelles on a voulu sommer une série infinie. — Il suffit, en vue d'une approximation, de supposer le nombre n des termes de la progression assez grand, et la partie $\frac{a}{1-q} \times q^n$ assez petit pour qu'on puisse la négliger et ne s'occcuper que de $\frac{a}{1-q}$.

Si, dans le même cas d'approximation, on veut appliquer, en supprimant le signe général de l'infini, la formule de la première théorie, qui est $S = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q-1}$, on mettra n à la place de ∞, et l'on supposera n assez grand, et $\frac{d}{bq^n}$ assez petit pour qu'il ne soit pas tenu compte de cette partie, et que l'expression soit réduite à $S = \frac{dq}{bq - b}$.

De cette manière, on arrivera aux résultats d'approximation qu'on veut atteindre dans la pratique, et l'on s'évitera des considérations et des conclusions théoriques condamnées par la raison; l'on écartera du langage scientifique ces expressions : *infini*, *infiniment petit*, *quantité plus grande*, *ou plus petite qu'aucune quantité assignable*, qui jettent dans la théorie des idées fausses, et lui enlèvent la rigueur, la *rationalité* qu'elle doit offrir; on aura respecté la raison, la vérité.

Beaucoup de mathématiciens ont, en réalité, regardé comme impossible la sommation d'une série infinie, même décroissante, en ce qu'un nombre infini de termes ne peut être réalisé; mais ceux qui se sont occupés des spéculations que je viens de reproduire et critiquer, ont généralement admis que si ce nombre infini pouvait être, les formules qui en sont les résultats seraient l'expression de la sommation d'une série infinie. Or c'est une erreur.

Il est des théories qui impliquent ou comprennent des sommations de séries infinies, obtenues par des procédés indirects, moins directs que ceux dont je viens de parler. Je vais m'occuper de quelques-unes de ces théories.

La *méthode* ou *géométrie des indivisibles*, œuvre de Cavalieri, a eu beaucoup de retentissement.

Cavalieri imagina le continu composé d'une infinité de parties, derniers éléments ou derniers termes de la décomposition qu'on en peut faire, en le divisant en tranches parallèles. Il appela *indivisibles* ces derniers éléments, et les envisageant dans le sens de leur étendue, il chercha et crut trouver dans leur accroissement et leur décroissement la mesure et le rapport des figures.

Cavalieri, du moins d'après ses expressions fort claires sur ce point, concevait alors le corps composé d'une quantité infinie de surfaces superposées, et les surfaces comme formées d'une infinité de lignes parallèlement unies.

L'auteur compare d'abord les figures entre elles. A l'aide du rapport constant qu'il établit entre leurs éléments, il prétend démontrer l'égalité, les rapports des parallélogrammes, des triangles, des prismes, etc., de même base et de même hauteur. Il conclut cette proposition générale : *toutes les figures dont les éléments croissent ou décroissent semblablement de la base au sommet, sont à la figure uniforme de même base et même hauteur, en même raison.*

Soit (fig. 31) une pyramide ABC, et l'espace parabolique extérieur DEF, compris entre la parabole, la tangente au sommet et une parallèle à l'axe. Ces figures sont décroissantes; car fg, élément de la pyramide, est dans le même rapport que le carré de la distance au sommet, et HI, dans la parabole extérieure, est de même comme le carré de DH. Suivant Cavalieri, il faut conclure de cette parité de rapport, que l'espace extérieur DEF de la parabole est le tiers du parallélogramme de même base et de même hauteur, comme la pyramide est le tiers du cylindre correspondant.

Cavalieri déterminait, pour les diverses figures, le rapport de la somme des éléments croissants ou décroissants dans les unes, avec la somme des éléments homogènes à ces premiers, mais tous égaux entre eux dans les autres. Ainsi, un cône étant, suivant Cavalieri, composé d'un nombre infini de cercles décroissants de la base au sommet; et le cylindre correspondant de même base et de même hauteur l'étant d'une infinité de cercles égaux, on obtiendrait la raison du cône au cylindre, en trouvant le rapport de la somme de tous ces cercles décroissants dans le cône, avec celle de tous les cercles égaux du cylindre. Or, dans le cône, les cercles, selon ce géomètre, décroîtraient de la base au sommet comme les carrés des termes d'une progression arithmétique. Dans d'autres corps, ils suivraient une autre raison.

Cavalieri examine d'abord quel est le rapport de la somme des carrés de toutes les lignes qui remplissent le triangle, avec la somme des carrés de toutes celles qui remplissent le parallélogramme de même base et de même hauteur; et il arrive à ce résultat que la première somme est le tiers de la seconde; d'où il conclut que les pyramides, les cônes, toutes les figures dont les éléments décroissent comme ces carrés sont le tiers des figures uniformes de même base et de même hauteur.

Ensuite il cherche les sommes des carrés des lignes qui remplissent diverses autres figures, comme le cercle, les segments du cercle et ceux des sections coniques; et il applique sa théorie à la solution de divers problèmes.

Il trouve ainsi, par exemple, que le solide (fig. 32) formé par la circonvolution de l'espace extérieur du quart de cercle ou de l'ellipse, comme GABH autour de GH, ou HB, est les $\frac{2}{21}$ du cylindre décrit en même temps par le rectangle GB, en supposant que le cercle est au carré du diamètre comme 11 est à 14.

Le géomètre Guldin critiqua cette méthode. Il nia qu'un corps pût être composé de surfaces accumulées, qu'une surface fût formée de lignes réunies.

Cavalieri défendit sa théorie. Pour justifier sa conception des corps et des surfaces, il soutint que sa méthode n'était, au fond, que celle d'*exhaustion*, ou des *limites* simplifiée ; que ces surfaces, ces lignes qu'il supposait et dont il cherchait les rapports et les sommes étaient, en réalité, les petits solides ou les triangles inscrits ou circonscrits d'Archimède, élevés à un si grand nombre que leur différence avec la figure à laquelle ils se rapportaient fût moindre que toute grandeur donnée, assignable.

Mais cette justification n'est point complète. Il n'est pas permis, en géométrie, dans le langage scientifique, de déguiser ainsi sa pensée. Ici, il s'agit de démontrer. Si vous fondez votre démonstration sur des propositions chimériques, vainement vous viendrez dire ensuite qu'elles signifient tout autre chose que ce qu'elles expriment grammaticalement. C'est une singulière démonstration que celle qui a besoin d'une semblable transformation du sens des mots qui l'expriment[1].

Quoi qu'on en ait dit, on ne peut assimiler la

1. Il est remarquable que de profonds mathématiciens ont chaudement défendu a méthode des indivisibles.

Pascal lui-même vint rompre une lance en faveur de cette vaine doctrine. Il déclara que la méthode des indivisibles *ne peut être rejetée par ceux qui prétendent avoir rang entre les géomètres ;* qu'elle ne diffère de celle des anciens *qu'en la* théorie des indivisibles à la méthode d'exhaustion, aux procédés employés par Archimède et auxquels on fait allusion.

Reprenant le cas de la pyramide ABC et de l'espace parabolique extérieur DEF, je dirai : De ce que, dans l'espace parabolique DEF, la ligne IH est en raison du carré de sa distance au sommet, et que dans la pyramide ABC, *fg* est aussi comme le carré de sa distance au sommet, on ne peut pas conclure que l'espace DEF doit être le tiers du parallélogramme de même base et de même hauteur, comme la pyramide est le tiers du cylindre correspondant à cette pyramide, en se fondant sur ce que les lignes et les surfaces considérées sont les éléments de ces figures. Si d'ailleurs on prétend que les lignes et les surfaces sont ici des bandes et des solides, alors le raisonnement croule : ces bandes ou solides, quelles que soient leur largeur, leur épaisseur, ne comportent pas entre elles les rapports qu'on admet entre les lignes ou surfaces considérées dans les figures dont il s'agit.

En s'en tenant aux lignes et aux surfaces, on

manière de parler; qu'ainsi *il ne fera aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, la somme des lignes, ou la somme des plans.* Il n'hésite pas à reprocher *leur manque d'intelligence à ceux qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes.*

peut regarder comme évident, par leurs rapports respectifs dans les figures, sans les regarder comme des éléments des figures, que, s'il pouvait y avoir des rapports de quantité entre des courbes et des droites, l'espace DEF et le parallélogramme de même base et même hauteur dont il s'agit, devraient être entre eux dans un même rapport de quantité que celui qui existerait entre la pyramide et le cylindre correspondant. Mais de tels rapports sont impossibles. L'espace DEF n'est point au parallélogramme de même base et de même hauteur ce qu'est la pyramide au cylindre qui lui répond. En considérant les formes, les dispositions respectives de ces objets, je vois des différences essentielles qui excluent tout rapport de quantité entre eux. Il en est ainsi quant au cône inscrit dans le cylindre : ce cône ne saurait être avec le cylindre circonscrit en même rapport ou raison que l'espace DEF avec le parallélogramme de même base et même hauteur.

J'ajoute que non-seulement Cavalieri attribue aux corps et aux surfaces des éléments impossibles, mais encore sa théorie suppose une infinité d'éléments dans le fini et implique la sommation exacte d'une suite infinie. Sa théorie est irrationnelle sous tous ces points de vue.

Je crois inutile d'insister sur cette critique : ce que je viens de dire suffit pour faire reconnaître les vices de la méthode des *indivisibles.*

Quelle qu'elle soit, elle ne peut démontrer l'impossible, et il est impossible qu'il y ait des rapports de quantités entre les grandeurs hétérogènes qui y sont comparées. Tous ces beaux problèmes, qui avaient occupé tant de géomètres, Képler notamment, et que crut résoudre Cavalieri, roulent sur des impossibilités et n'ont pu recevoir de lui une solution rationnelle : telle est la *symbolisation de la parabole avec la spirale;* telle est la *détermination de la mesure des conoïdes*, de toutes les paraboles des ordres supérieurs. Tout cela est ingénieux et peut être pratiquement utile, comme offrant des procédés d'approximation; mais la rigueur rationnelle y est sacrifiée; on ne peut donc l'accepter en théorie.

Je suis tout naturellement amené à parler ici de l'*arithmétique des infinis*, développée par Wallis.

Cavalieri, poursuivant la solution de ce problème de Képler : *Quelle est la grandeur du solide décrit par la parabole tournant autour de son ordonnée?* avait pensé que le problème se réduisait à déterminer le rapport de la somme des carrés-carrés des lignes qui remplissent le triangle, à la somme des mêmes puissances des lignes qui remplissent le parallélogramme, et trouvé que ce rapport était celui de 1 à 5; puis, il avait vu que, s'il s'agissait des cubes de ces lignes, le rapport serait celui de 1 à 4, et enfin conclu, par analogie, que l'exposant d'une puissance quelconque étant n, le rapport des sommes est celui de 1 à $n + 1$.

Confirmant cette donnée, Wallis étendit beaucoup l'application du calcul à la méthode des *indivisibles* de Cavalieri.

Il imagina de regarder les dénominateurs des fractions comme des puissances à exposants négatifs. Considérons, par exemple, cette suite de puissances x^3, x^2 x^1, x^0 ou 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, etc., qui sont en progression géométrique continue : les exposants seront évidemment en progression arithmétique; et ceux des premières étant 3, 2, 1, 0, ceux des suivantes doivent être -1, -2, -3, etc.; il s'ensuit que $\frac{1}{x} = x^{-1}$, que généralement $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Wallis se crut ainsi en possession de la mesure de tous les espaces dont les éléments sont *réciproquement comme quelque puissance de l'abscisse*. Par exemple, l'ordonnée étant réciproquement comme l'abscisse, dans l'hyperbole ordinaire, et réciproquement comme une puissance de l'abscisse dans les hyperboles des ordres supérieurs, l'équation de toutes ces courbes, qui est $y = \frac{1}{x^m}$, est aussi $y = x^{-m}$.

De plus, d'après cette règle de Cavalieri, que j'ai rappelée plus haut, dans les courbes dont l'équation est $y = x^m$, le rapport général de l'aire au parallélogramme de même base et de même hauteur, est $1 : m + 1$, quelle que soit la grandeur de m; Wallis concluait, selon les règles de l'analogie, de la continuité, qu'il en est ainsi, alors même que m, étant négatif, devient $-m$. Le rapport, en ce cas, devra donc être $1 : -m + 1$, ou en général, de 1 à $m + 1$, en prenant m avec le signe dont il est affecté. Dans l'hyberbole où l'ordonnée est réciproquement comme la racine de l'abscisse, m devient $\frac{1}{2}$; on a donc alors $-m = -\frac{1}{2}$: d'où l'on conclura que le rapport, en ce cas est 1 à $-\frac{1}{2} + 1$, ou 1 à $\frac{1}{2}$. Enfin, si $m = 1$, cas de l'hyberbole ordinaire, le rapport est $1 : -1 + 1$, ou $1 : 0$, et Wallis l'interprétait en ce sens que l'hyberbole ordinaire a son espace asymptotique *infini*[1].

1. D'après la discussion que j'ai établie précédemment sur la signification de $\frac{A}{0}$, ce signe est celui de l'impossibilité, non pas

Wallis appliqua sa méthode à des cas plus composés : ainsi, il l'appliqua aux figures où l'ordonnée est exprimée par une puissance complexe, telle que $\sqrt{a} - \sqrt{x}$, $a^2 \pm 2ax - x^2$. Il considéra l'ordonnée comme formée de plusieurs autres ordonnées $\sqrt{a}$ et $\sqrt{x}$, ou a^2, $\pm 2ax$ et $\pm x^2$; dans ces cas l'aire serait composée de plusieurs parties. Dans le dernier exemple, l'aire serait composée d'une partie a^2x, d'une autre $\pm ax^2$, et d'une troisième $\frac{x^3}{3}$, suivant la règle que j'ai rapportée ci-dessus.

Wallis assura que l'on pouvait ainsi obtenir la quadrature absolue de toutes les figures dont les ordonnées seraient exprimées par $(1 - x^2)^0$, $(1 - x^2)^1$, $(1 - x^2)^2$, $(1 - x^2)^3$, etc. D'après l'*arithmétique des infinis*, la première est égale au parallélogramme circonscrit; la seconde en est les $\frac{2}{3}$; la troisième les $\frac{8}{15}$; la quatrième les $\frac{48}{105}$, quand $x = 1$. On aurait donc, suivant Wallis, une suite de termes $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, etc., dont chacun expri-

celui de l'infini. Le rapport $1 : 0$ ou $\frac{1}{0}$ n'exprimerait donc pas l'infinité de l'espace asymptotique. Il devrait signifier que l'application de la règle dont il s'agit ne saurait ici donner l'aire cherchée. Cette règle serait parfois en défaut; elle ne fournirait pas toujours le résultat demandé.

merait le rapport qu'aurait au parallélogramme de même base et de même hauteur, la figure dont l'ordonnée tiendrait, pour son expression, un rang correspondant dans la suite des grandeurs $(1 - xx)^0$, $(1 - xx)^1$, $(1 - xx)^2$, etc. Or, les exposants des termes de cette dernière suite sont en progression arithmétique, 0, 1, 2, etc. Si donc on introduisait un nouveau terme entre chacun de ceux là, celui qui tomberait entre $(1 - xx)^0$ et $(1 - xx)^1$, serait $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, qui se trouve être l'expression de l'ordonnée du cercle. Par conséquent, concluait Wallis, on aurait la quadrature du cercle, si l'on pouvait, dans la suite 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, etc., trouver le terme moyen entre 1 et $\frac{2}{3}$. Dans l'impossibilité de trouver exactement ce terme, Wallis imagina de l'exprimer par une fraction dont il supposait que le numérateur et le dénominateur étaient infinis, et qui est celle-ci :

$$\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \text{etc.}}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \text{etc.}}$$

Le rapport du carré circonscrit au cercle devait donc être, d'après ce géomètre, celui de l'unité à cette dernière expression, ou de l'unité à

$$\frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81}, \text{ etc.},$$

ou bien à

$$\frac{2}{3} \times \frac{16}{15} \times \frac{36}{35} \times \frac{64}{63}, \text{ etc. };$$

et l'on approcherait d'autant plus de la vérité, qu'on prendrait un plus grand nombre de termes.

La théorie de Wallis, fondée sur la géométrie des indivisibles, dont j'ai montré l'irrationalité, ne peut valoir plus que cette géométrie. C'est en partant d'hypothèses fausses que Cavalieri est arrivé à ce rapport, $1 : m + 1$, que Wallis s'est vainement efforcé de prouver. Ce rapport ne pouvant être exact ne saurait être pris pour base d'un calcul qui doit donner un résultat rigoureusement vrai. Ainsi, les quadratures, les mesures assignées par Wallis d'une manière positive, absolue, et non pas seulement approximative, au moyen de cette sorte de calcul, s'évanouiraient, alors même qu'elles ne seraient pas impossibles en elles-mêmes, comme le sont celles des surfaces curvilignes et des solides à surfaces courbes.

Wallis n'était pas non plus vraiment fondé à juger que l'on peut obtenir la quadrature absolue de toutes les figures dont les ordonnées sont exprimées par $(1-x^2)^0$, $(1-x^2)^1$, etc. ; il n'y a point de quadrature absolue pour une courbe quelconque. Les calculs qu'il présente à cet égard ne sont donc point exacts. L'on n'aurait pas, par exemple, la quadrature du cercle, alors même que l'on pourrait trouver un terme moyen entre 1 et $\frac{2}{3}$, dans la suite 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, etc.

La fraction $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \text{etc.}}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \text{etc.}}$,

fût-elle supposée continuée à l'infini ne saurait exprimer ce terme moyen. Il en est ainsi de la fraction continue trouvée par Brouncker; elle ne vaut pas mieux, rationnellement, bien que préférable dans la pratique.

Je ne parle pas de toutes les spéculations qu'on a entées, pour ainsi dire, sur la méthode de Wallis : elles s'abîment toutes dans l'irrationalité de leur base. (Voir, à la fin de ce livre, ma note sur l'*arithmétique des infinis.*)

L'on attribue à l'hyperbole une propriété que la raison ne saurait lui reconnaître. On assure que l'espace asymptotique, l'aire comprise entre l'hyperbole, l'asymptote et deux ordonnées, croît uniformément, tandis que l'abscisse croît géométriquement, de telle sorte que cette aire est le logarithme de l'abscisse correspondante. L'on a fondé cette proposition sur la fausse hypothèse des indivisibles. L'on a conçu l'espace asymptotique comme rempli par une infinité de rectangles à base tellement minime qu'elle serait nulle. Reposant sur cette base croulante, le théorème n'aurait aucune force rationnelle, alors même qu'il ne serait pas frappé d'irrationalité dans la proposition même.

L'on a fait servir cette prétendue propriété de l'hyperbole à la détermination de sa quadrature. Là encore surgit donc une double irrationalité.

L'on a voulu obtenir les aires des surfaces et la mesure des volumes au moyen des centres de gravité; mais tout ce qu'on a produit à ce sujet repose sur des données fausses.

Ainsi, par exemple, pour montrer que si une surface ABCDE (fig. 33) tourne autour d'une ligne AE donnée de position, et qui est toute d'un même côté par rapport à la surface, le solide qu'elle décrira sera égal au produit de la surface par la circonférence décrite par son centre de gravité, Deydier raisonne ainsi :

« Tandis que la surface tournera, tous les points « de ses éléments décriront des circonférences dont « les rayons seront les distances de ces points à la « ligne AE. Donc ces circonférences seront entre

« elles comme ces distances. Or (suivant une pro-
« position précédente de l'auteur), les points mul-
« tipliés chacun par sa distance sont égaux à la
« somme des points multipliés par la distance RS,
« du centre de gravité. Donc les points multipliés
« chacun par la circonférence qu'il décrit sont en-
« semble égaux à la somme des points ou à la surface
« multipliée par la circonférence que décrit le centre
« de gravité ; mais les points multipliés chacun par
« sa circonférence composent le solide que décrit la
« surface ; donc ce solide est égal au produit de la
« surface par la circonférence que le centre de gra-
« vité décrit. »

Veut-on un exemple tiré d'un auteur plus récent? Je le prendrai dans la statique de M. Poinsot.

Pour déterminer l'aire de la surface de révolution engendrée par une courbe plane quelconque ABC (fig. 34), qui tourne autour d'un axe PZ situé dans son plan, l'auteur juge que chaque élément *ds* de la courbe génératrice produit une surface de cône tronqué, dont l'aire P est égale au côté *ds* multiplié par la circonférence du cercle que décrit son milieu ou centre de gravité I, autour de l'axe PZ ; en sorte que si l'on suppose tous ces éléments égaux, la surface entière sera égale à leur somme multipliée par la circonférence moyenne entre celles que décrivent tous leurs centres de gravité. Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance de tous ces points à l'axe de révolution, ou bien la distance du centre de gravité de la courbe au même axe. Donc, conclut-il, l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe de révolution.

Or, dans le premier exemple, se montre l'idée fausse des indivisibles; cette idée est évidemment une des bases du raisonnement.

Dans le théorème de M. Poinsot, l'indivisibilité des éléments est dissimulée; mais l'auteur y considère, contrairement à la vérité, les parties de la courbe génératrice comme des droites.

De plus, dans ces argumentations, on admet des rapports de quantité entre des courbes et des droites, on admet des quadratures qui sont impossibles, une cubature chimérique.

Au reste, quand je m'occuperai de la statique, je montrerai que la détermination des centres de gravité n'a point toujours été rationnelle.

En dehors des méthodes dont je viens de parler et du calcul différentiel, on a fait usage de l'infiniment petit dans les solutions géométriques. Ainsi, par exemple, pour mener à l'ellipse, en un point M (fig. 35), la tangente MT, on a procédé de la manière suivante :

On a imaginé l'arc Mm infiniment petit, et mené des foyers F, f (fig. 35), les rayons vecteurs fm, fM, Fm, FM ; puis, ayant décrit des centres F et f et des rayons FM, fm, les petits arcs Mg, mr, on a dit : « $fm + mF = FM + Mf$, ou $fM - fm = Mr$ « $= Fm - FM = mg$: donc les triangles rectangles « mMg, mMr, sont égaux et semblables, et par conséquent l'angle gmM, ou FmT, ou $FMT = mMr$ « $=$ LMT. Donc si on prolonge le rayon vecteur fM, « la ligne MT qui divisera l'angle LMF en deux « également, sera la tangente demandée.

« L'angle $LMT = OMf = FMT$: on voit donc de « plus que tous les rayons partis d'un foyer lumi- « neux F doivent, à la rencontre de l'ellipse AM, se « réfléchir à l'autre foyer f. »

Or cette démonstration pèche essentiellement. Point d'infiniment petit ; point de rapport entre des courbes et des droites. Il est impossible que la droite gm fasse un triangle rectangle avec les courbes gM, mM ; que la droite Mr fasse un triangle rectangle avec les courbes mr, mM. De deux choses l'une, ou bien les triangles dont il s'agit sont réels, ont une étendue réelle, ou bien ils n'existent pas. Dans le premier cas, celui de leur réalité, il est absurde d'admettre que l'angle FmM ou gmM égale l'angle FMT ; évidemment ce dernier doit être plus grand que le premier, FM étant moins oblique que

Fm à OT. Si, au contraire, les triangles considérés n'existent pas, le raisonnement est évidemment sans base.

Au reste, l'on ne pourrait pas prétendre que la justesse des conclusions prouve la justesse des principes sur lesquels on les appuie. Il est possible, je l'ai dit, de déduire des vérités de faux principes ; il est des démonstrations fausses qui pourtant concluent à des vérités. Je doute que certains principes, que, par exemple, les données invoquées dans le cas dont je viens de m'occuper, satisfassent pleinement ceux qui les produisent ou les adoptent. Leur raison a bien pu parfois murmurer contre de telles spéculations. Quoi qu'il en soit, on arrive à des solutions, et, de ce qu'on y parvient, il ne s'ensuit point la légitimité des principes, des données qu'on emploie. En définitive, l'on ne prouve rien par de tels procédés : l'on s'alambique vainement l'esprit ; l'on torture, l'on confond les notions les plus claires, pour n'obtenir qu'un semblant, qu'une ombre de démonstration qui s'évanouit à la lueur de la raison.

Il n'est pas rationnel d'envisager une courbe comme décrite par un mobile ou par un point soumis à deux mouvements divers, à deux forces agissant dans diverses directions. L'irrationalité de cette manière de considérer une courbe sera mise en lumière dans la partie de ce Traité relative

*

aux mathématiques mixtes. L'on ne peut considérer la tangente à une courbe comme la direction d'un mobile qui décrirait celle-ci, à chacun des points de cette direction; car la tangente est une droite, et le mobile qui décrirait une courbe ne suivrait jamais la direction d'une droite, puisqu'il tournerait toujours. Toutes ces conceptions sont entachées d'*infiniment petits*, de lignes réduites à des points et pourtant considérées comme si elles étaient des lignes. Ces irrationalités condamnent bien des théories, et notamment la méthode des tangentes de Roberval.

CHAPITRE X

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

On peut considérer, touchant ce calcul, quatre méthodes principales : la méthode des fluxions, celle des limites proprement dites, celle des infiniment petits, et celle des fonctions analytiques.

§ Ier

De la méthode des fluxions.

On sait que cette méthode a été imaginée par Newton, puis développée par Maclaurin, qui s'est efforcé de l'établir sur de solides fondements.

Dans la méthode des fluxions, on conçoit les quantités comme accrues ou diminuées, ou totalement produites par le mouvement, ou par une fluxion continue, analogue au mouvement. La quantité ainsi produite est dite *fluer* et se nomme *fluente.*

On y conçoit le mouvement uniforme et le mouvement continûment accéléré ou retardé. Le temps coule toujours d'un cours uniforme et sert à mesurer les changements de toute chose. Si l'espace décrit par le mouvement *coule* de la même manière que le temps, en sorte que des parties égales de l'espace soient décrites en parties égales du temps, le mouvement est uniforme, et sa vitesse est mesurée par l'espace décrit dans un temps donné. La vitesse du mouvement uniforme est la même à la fin de chaque partie du temps pendant lequel il s'effectue. Mais le mouvement est susceptible de varier comme les autres quantités; la vitesse peut croître ou décroître continûment : alors le mouvement est dit continûment accéléré ou retardé. Dans ce cas, néanmoins, la vitesse à la fin d'un temps est exactement mesurée par l'espace qui aurait été décrit dans un temps donné, si le mouvement avait été continué uniformément depuis ce terme.

Les lignes sont produites par le mouvement des points; les surfaces par le mouvement des lignes; les solides par le mouvement des surfaces; les angles par la rotation de leurs côtés, en supposant toujours l'écoulement du temps uniforme. La vitesse avec laquelle une ligne flue est la même que celle du point qui est supposé la décrire ou la produire. La vitesse avec laquelle la surface flue est la même que celle d'une ligne droite donnée, qui, se mouvant parallèlement à elle-même, produit un rectangle. La vitesse avec laquelle un solide flue est la même que celle d'une surface plane donnée, qui, se mouvant parallèlement à elle-même, est supposée produire un prisme droit ou un cylindre. La vitesse avec laquelle un angle flue est mesurée par la vitesse d'un point qui est supposé décrire un arc d'un cercle donné.

On représente les quantités de même espèce par des lignes droites, et les vitesses des mouvements qui sont supposés les produire, par les vitesses des points qui se meuvent sur des lignes droites.

La vitesse avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du temps pendant lequel elle est supposée se former, se nomme *fluxion*; la fluxion est par conséquent toujours mesurée par l'incrément ou le décrément que ce mouvement aurait produit dans un temps donné, s'il avait été continué uniformément depuis ce terme sans accélération ou retardement; ou bien on peut la mesurer par la quantité qui serait produite dans un temps donné par un mouvement uniforme égal au mouvement générateur à ce même terme.

Le temps est représenté par une ligne droit qui flue uniformément ou qui est décrite par un mouvement uniforme, et le moment ou terme du temps est représenté par un point ou par le terme ou l'extrémité de cette ligne. La vitesse donnée est représentée par une ligne donnée, la même qui aurait été décrite par cette vitesse dans un temps donné. La vitesse continûment accélérée ou retardée est représentée par une ligne qui croît ou décroît continûment en même proportion.

Ce sont là les bases sur lesquelles a été construit l'édifice des fluxions, et je ne crains point d'affirmer que ces bases sont, sous un rapport, sapées par la raison.

En effet, la raison proteste contre un mouvement accéléré ou retardé d'une manière continue, contre une vitesse croissant ou décroissant de cette manière. On conçoit qu'un objet, un point, supposé en mouvement, après s'être mû avec une certaine vitesse, une vitesse égale pendant un instant, pendant une partie quelconque du temps, prenne un mouvement plus vite ou plus lent, le suive un instant, puis prenne une autre vitesse, un mouvement encore plus vite ou plus lent, et ainsi de suite. On peut, en un mot, admettre un mouvement qui change de vitesse de temps en temps, devienne même de plus en plus rapide, ou de plus en plus lent, d'*instant en instant*, de *moment en moment*, l'instant ou le moment étant une *partie divisible du temps*, étant une *durée;* mais il est impossible que la vitesse d'un objet quelconque, d'un point, croisse ou décroisse de telle sorte qu'il n'y ait pas un temps, une durée quelconque, si courte qu'elle soit, où le mouvement ait eu une vitesse égale pendant les diverses parties qu'on peut y concevoir.

Pour faire admettre le mouvement continûment accéleré ou retardé, on a conçu le temps et l'espace comme composés d'une suite de points, d'éléments indivisibles; ce qui est impossible: l'étendu, le divisible ne saurait être formé de l'inétendu, de l'indivisible. Maclaurin, qui l'a senti, a eu le soin de déclarer, dans son Traité des fluxions, qu'il n'entendait prendre aucune partie du temps ou de l'espace comme indivisible ou comme infiniment petite; mais qu'il regardait le *point* comme l'extrémité d'une ligne, et le *moment* comme l'extrémité ou la limite du temps.

Plus bas, il dit, : « Lorsque nous supposons « qu'un corps a telle ou telle vitesse à chaque terme « du temps pendant lequel il se meut, nous ne pré« tendons pas dire qu'il ait quelque mouvement « dans ce terme, limite ou moment du temps, ou « dans un point indivisible de l'espace: mais comme « nous mesurons toujours cette vitesse par l'espace « qui aurait été décrit, si ce mouvement avait été « continué uniformément depuis ce terme pendant « un temps fini, déterminé, on ne pourra pas dire « que nous prétendions concevoir un mouvement ou « une vitesse, sans aucun égard à l'espace et au « temps. »

On voit que, selon Maclaurin, la vitesse existerait abstraction faite du mouvement. Il y aurait à un terme, à une limite de l'espace et du temps telle vitesse, sans qu'il y eût mouvement en ce terme, en cette limite; ce qui est inadmissible : la vitesse implique le mouvement, est inséparable du mouvement; or, au terme, à la limite de l'espace ou du temps, il n'y a pas de mouvement, partant pas de vitesse. On peut concevoir la vitesse à un moment ou instant, pourvu que, par moment ou instant, on entende une partie divisible de durée; la vitesse à un temps quelconque, à une partie quelconque de durée, est le *quantum*, le plus ou moins d'espace parcouru pendant ce temps, pendant cette partie de durée. En vain, Maclaurin se débat contre une impossibilité; il tourne dans un cercle vicieux. Il sent qu'on ne peut rationnellement admettre que l'espace et le temps soient composés d'éléments indivisibles, d'infiniment petits; que le mouvement ne peut être à un point indivisible de l'espace et du temps, et que cependant la vitesse suppose un mouvement. Il transige donc avec la raison, place la *vitesse* à un point indivisible, pour satisfaire à l'exigence de la méthode, et met à la suite de ce point le *mouvement* que réclame la vitesse ainsi violemment séparée de ce qui en est inséparable par l'essence même des choses. Lui-même tombe dans l'infiniment petit qu'il s'efforce de conjurer.

Je le répète, la raison est violée par l'hypothèse de mouvements continûment accélérés ou retardés. Écartez cette impossible hypothèse, et toute difficulté cesse, il n'est plus nécessaire de torturer les idées, de fausser le sens des mots, d'imaginer, par exemple, que l'instant n'est pas un élément de la durée, n'en est pas une partie, mais qu'il est la *limite du temps*, l'extrémité d'une portion du temps. On peut alors admettre tout naturellement que le temps est une suite d'instants divisibles, le concevoir comme une suite de petites portions de durée qui, si ténues qu'elles soient supposées, peuvent être divisées elles-mêmes par la pensée en parties plus petites encore. En soi-même, la durée, supposée réelle, n'a aucune division, pas de partie; c'est un continu, une quantité continue dans l'objet auquel elle est attribuée.

M'opposera-t-on l'expérience, le fait, en alléguant que la nature même nous offre le mouvement continûment accéléré, dans la chute des graves? — L'expérience, je l'ai déjà dit, ne saurait être légitimement opposée à la raison; cette accélération continue que la physique proclame et prétend fonder sur l'observation est impossible; donc elle n'est pas : voilà ce que dit la raison.

Quand même la méthode ne pécherait pas essentiellement sous le rapport que je viens de considérer, elle ne serait pas complétement satisfaisante.

En effet, la *fluxion* implique un phénomène successif et continu; elle suppose une quantité ou grandeur croissante ou décroissante, formée continûment, ou du moins continûment accrue ou diminuée, et cela se conçoit, dans l'hypothèse de points, de lignes, de surfaces en mouvement; car il est de l'essence du mouvement, même du mouvement uniforme, de s'éloigner plus ou moins, ou, pour mieux dire, d'éloigner plus ou moins l'objet qui se meut du point de départ; et ainsi l'on peut supposer la fluxion d'un espace et appliquer cette donnée à une quantité qui serait en raison d'un espace qu'elle comprendrait[1]. L'on conçoit encore l'accroissement continu ou la fluxion du temps; mais, quant aux autres grandeurs ou quantités, il n'est pas possible de leur supposer une augmentation ou une diminution continue. On peut seulement admettre qu'elles augmentent ou diminuent de temps en temps, en passant par des degrés successifs plus ou moins rapprochés, soit croissants, soit décroissants. C'est donc contrairement à leur nature, qu'on admet des fluxions pour ces grandeurs, comme pour celles de l'espace et du temps.

1. Mais on peut contester cette fluxion en contestant le mouvement.

Ainsi, quand même la méthode serait irréprochable, à l'égard des fluxions relatives à ces dernières grandeurs, ce qui n'est point, elle ne serait pas susceptible, théoriquement, d'être étendue aux autres quantités. Si elle était appliquée à des quantités qui ne fussent pas de nature à pouvoir être envisagées comme affectant une augmentation ou une diminution continûment successive, l'on ne pourrait jamais, en ces cas, puiser dans la théorie même la certitude fondée, rationnelle, d'arriver à une juste solution. Si l'on obtenait néanmoins des résultats exacts, l'on ne devrait pas, au point de vue théorique, en faire honneur à un procédé faussement appliqué dans l'hypothèse.

Quand même des quantités quelconques autres que celles relatives à l'espace seraient regardées justement comme croissant ou décroissant d'une manière continûment successive, la plupart des solutions obtenues pour les quantités concernant l'espace ne leur seraient pas rationnellement applicables.

Au reste, une fois qu'on a assimilé toutes les quantités ou grandeurs sous le rapport des fluxions, la méthode newtonienne donne les généralités fournies par les autres théories de ce genre.

Dans la théorie des fluxions, on prétend démontrer cette proposition : « Les fluxions des droites AD

« et AL (fig. 36) étant représentées par DG et LM, « la fluxion du rectangle AE, compris sous AD et « AL, sera mesurée exactement par la somme des « rectangles EG et EM, lorsque ces lignes croissent « ou décroissent ensemble, mais par la différence de « EG et EM, lorsque l'une de ces lignes décroît « pendant que l'autre croît. » — Ce théorème repose sur des démonstrations précédentes où figure la fausse hypothèse d'un mouvement continûment accéléré ou retardé : il n'est donc pas rationnel, mais il serait satisfaisant, si cette hypothèse était admissible.

Or, de ce même théorème, si x et y représentent les droites AD et AL, et $\dot{x}$ et $\dot{y}$ les fluxions de x et y, on peut d'abord conclure que la fluxion de xy, représentant le rectangle AE, est égale à $y\dot{x} + x\dot{y}$, exprimant les rectangles EG et EM; et, en supposant AD = AL, et conséquemment $x = y$, il s'ensuivra que la fluxion de xx ou x^2 sera égale à $x\dot{x} + x\dot{x} = 2x\dot{x}$, résultat conforme à l'expression générale que donne le calcul différentiel pour la différentielle de x^2.

On peut aussi trouver, dans la méthode des fluxions, par une déduction logique, les autres expressions générales du calcul différentiel. Toutefois, cette méthode ne répond pas à tous les besoins du calcul, ne présente pas toutes les facilités pratiques qu'offrent d'autres théories dont je parlerai bientôt.

Maclaurin, considérant que « l'idée d'une fluxion « (telle qu'il l'a donnée d'après Newton) paraît « convenir plus immédiatement aux grandeurs géo- « métriques, que nous pouvons fort naturellement « concevoir comme formées par le mouvement, « qu'elle ne convient aux quantités considérées abs- « tractivement, ou telles qu'elles sont exprimées « par les symboles généraux de l'algèbre », chercha, dans les calculs algébriques et indépendamment du mouvement et de la vitesse, la confirmation des règles générales de la méthode des fluxions, et des résultats généraux qu'elle peut donner. Cette partie de son œuvre mérite une attention particulière. L'appréciation que j'en ferai exige que j'en reproduise ici textuellement plusieurs passages, les principaux articles.

« 700... Lorsque, dit-il, une quantité A croît par « des différences égales a, 2A croît ou décroît par « des différences égales à $2a$, et il est clair qu'elle « croît ou décroît dans un plus grand rapport que « A, en proportion de $2a$ à a, ou de 2 à 1 ; et si m « et n sont invariables, $\dfrac{mA}{n}$ croît ou décroît par des « différences $= \dfrac{ma}{n}$, et par conséquent en plus grand

« ou moindre rapport que A, à proportion que $\frac{ma}{n}$
« est plus grand ou moindre que a, ou que m est
« plus grand ou moindre que n. Cela paraît fort aisé
« à comprendre, sans avoir recours à d'autres con-
« sidérations qu'aux relations des différences par
« lesquelles les quantités croissent ou décroissent....

« 701. Nous appellerons donc *fluxions* des quan-
« tités, *toutes les mesures de leurs rapports respectifs*
« *d'accroissement ou de décroissement, pendant*
« *qu'elles varient* (ou fluent) *ensemble.* Il n'y a
« point de difficulté à déterminer ces mesures, lors-
« que les quantités croissent ou décroissent par des
« différences successives, qui sont toujours dans la
« même proportion invariable l'une à l'autre, comme
« dans le dernier article. Pendant que A croissant
« devient $= A + a$, ou qu'en décroissant, il devient
« $= A - a$, 2A devient $= 2A + 2a$, ou $= 2A - 2a$,
« selon que 2A croît ou décroît, dans un plus grand
« rapport que A, en proportion de $2a$ à a; en sorte
« que la fluxion de A étant supposée $= a$, celle de
« 2A sera $= 2a$. De même la fluxion de $\frac{m}{n}$A (ou
« de $\frac{m}{n}A \pm e$, supposant m, n et e invariables) est
« $\frac{m}{n}a$, et puisque m est à n en une raison détermi-

« nable, on peut toujours assigner une quantité qui « croisse ou décroisse en plus grand ou en moindre « rapport que A, en quelque proportion, ou qui ait « sa fluxion plus grande ou moindre que celle de A « en quelque raison. En pareils cas, la raison des « fluxions est la même que celle des différences par « lesquelles les quantités croissent ou décroissent.

« 702. Mais, pendant que A est supposé croître « dans un rapport constant, par des différences suc- « cessives égales, si B croît ou décroît par des « différences qui varient sans cesse, on ne peut pas « dire que B croisse ou décroisse dans aucun rapport « constant, et il n'est si facile de déterminer la fluxion « variable de B, en supposant celle de A égale à son « incrément a. On ne peut pas supposer que les « fluxions et les différences soient toujours, dans ce « cas, en même proportion; mais il est cependant « évident que si B croît par des différences toujours « plus grandes que les différences égales et succes- « sives par lesquelles $\frac{m}{n}$ A croît, il ne peut pas croître « dans un moindre rapport que $\frac{m}{n}$ A, et qu'il ne peut « pas aussi croître dans un plus grand rappport que « $\frac{m}{n}$ A, lorsque ses différences successives sont tou- « jours moindres que celles de $\frac{m}{n}$ A. La fluxion de A

« étant toujours représentée par a, celle de B ne « peut donc pas être moindre que $\frac{m}{n}$ a dans le pre- « mier cas, ou plus grande que $\frac{m}{n}$ a dans le second.

« Les propositions suivantes sont des conséquences « de celles-ci, et elles nous mettront en état de dé- « terminer en quel rapport B croît, lorsque sa re- « lation avec A est connue.

« 703. Les valeurs successives de la racine A « étant représentées par A — a, A, A + a, etc., « lesquelles croissent d'une différence constante a, « soient les valeurs correspondantes d'une quantité « dérivée de A, par quelque opération algébrique « (ou qui en dépend, en sorte qu'elle varie avec A), « B — b, B, B + b, etc. : si les différences suc- « cessives b, b, etc., de la dernière quantité croissent « toujours, quelque petit que a puisse être, on ne « peut pas dire que B croisse dans une proportion « aussi grande qu'une quantité qui croît uniformé- « ment par des différences successives égales plus « grandes que b, ou dans une proportion aussi petite « qu'une quantité qui croît uniformément par des « différences successives égales moindres que b. De « même, si la relation des quantités est telle que les « différences successives b, b, etc., décroissent « continuellement, on ne peut pas dire que B croisse

« en même proportion qu'une quantité qui croît « uniformément par des différences successives égales « plus grandes que b, ou moindres que *b*.

« 704. Donc la fluxion de A étant supposée égale « à l'incrément *a*, celle de B ne peut pas être plus « grande que *b*, ou moindre que b, lorsque les dif- « férences successives b, *b*, etc., croissent conti- « nuellement, et elle ne peut pas être plus grande « que b, ou moindre que *b*, lorsqu'elles décroissent « toujours.

« 705. De même, si la dernière quantité décroît, « pendant que la première croît, et que ses valeurs « successives soient B + *b*, B, B — b, etc., les dé- « créments *b*, b, etc., croissant continuellement, on « ne peut pas dire que B décroisse en aussi grande « proportion qu'une quantité qui décroît uniformé- « ment, par des différences successives égales, plus « grandes que b, ou en proportion aussi petite qu'une « quantité qui décroît uniformément, par des diffé- « rences successives égales, moindres que *b*. Donc, « en ce cas, la fluxion de A étant supposée $= a$, « celle de B ne peut pas être plus grande que b, ou « moindre que *b*. Et de même, si les décréments « successifs *b*, b, etc., décroissent toujours, la fluxion « de B ne peut pas être plus grande que *b*, ou « moindre que b.

« 706. Comme les fluxions des quantités sont les

« mesures des rapports respectifs selon lesquels elles « croissent ou décroissent, par l'art. 701, il n'im- « porte pas que ces mesures soient grandes ou petites, « pourvu qu'elles soient dans la juste proportion ou « relation l'une à l'autre. Donc, si les fluxions de A « et B sont supposées égales à a et b, respectivement, « on peut de même les supposer égales à $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$, « ou à $\frac{ma}{n}$ et $\frac{mb}{n}$.

« 707. Proposition première. La fluxion de la « racine A étant supposée $= a$, celle du carré AA « sera $= 2Aa$.

« Que les valeurs successives de cette racine « soient $A - u$, A, $A + u$, les valeurs correspon- « dantes du carré seront $AA - 2Au + uu$, AA, « $AA + 2Au + uu$, lesquelles croissent par les dif- « férences $2Au - uu$, $2Au + uu$, etc. ; et parce que « ces différences croissent, il suit de l'article 704, « que si la fluxion de A est représentée par u, celle « de AA ne peut être représentée par une quantité « plus grande que $2Au + uu$, ou moindre que « $2Au - uu$. Ce qui étant, je suppose, comme dans « la proposition, que la fluxion de A est $= a$. Si « celle de AA n'était pas $= 2Aa$, qu'elle soit d'abord « plus grande que $2Aa$ en une raison quelconque, « comme celle de $2A + o$ à $2A$, et par conséquent

« $= 2Aa + oa$. Supposons maintenant que u est un « incrément de A moindre que o; puisque $a : u ::$ « $2Aa + oa : 2Au + ou$, il suit (article 706) que, si « la fluxion de A est représentée par u, celle de AA « sera représentée par celle de $2Au + ou$, qui est « plus grande que $2Au + uu$. Mais on a fait voir, « par l'article 704, que si la fluxion de A est repré- « sentée par u, celle de AA ne peut pas être repré- « sentée par une quantité plus grande que $2Au + uu$; « ce qui étant contradictoire, il suit que la fluxion « de A étant $= a$, celle de AA ne peut pas être plus « grande que $2Aa$. Si, dans ce cas, elle paraît être « plus petite que $2Aa$, qu'elle soit moindre en raison « de $2A - o$ à $2A$, et par conséquent $= 2Aa - oa$. « Donc, puisque $a : u :: 2Aa - oa : 2Au - ou$, « qui est moindre que $2Au - uu$ (u étant supposé « moindre que o, comme ci-devant), il suit que, si « la fluxion de A était représentée par u, celle de AA « le serait par une quantité moindre que $2Au - uu$, « contre ce qu'on a démontré par l'article 704. Donc « la fluxion de A étant $= a$, celle de AA est $= 2Aa$.

« 708. Les fluxions de A et B étant supposées « égales à a et b respectivement, celle de $A + B$ sera « $= a + b$, celle de $(A + B)^2$ ou de $AA + 2AB$ « $+ BB$ sera $= 2(A + B) \times (a + b)$ ou $2Aa$ « $+ 2Bb + 2Ba + 2Ab$, par le dernier article. Celle « de $AA + BB$ est $2Aa + 2Bb$, par le même. Donc

18

« la fluxion de 2AB est $2Ba + 2Ab$, et celle de AB « est $Ba + Ab$. Ainsi P étant $= AB$, et la fluxion « de P étant p, p sera $= Ba + Ab$, et divisant par « P, ou AB, nous trouverons

$$\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{b}{B}.$$

« Si $Q = \frac{A}{B}$, et que q soit la fluxion de Q, celle de QB « sera $= \frac{q}{Q} + \frac{b}{B} = \frac{a}{A}$, ou $\frac{q}{Q} = \frac{a}{A} - \frac{b}{B}$, et par con- « séquent $q = \frac{Qa}{A} - \frac{Qb}{B} = \frac{a}{B} - \frac{Ab}{BB} = \frac{aB - Ab}{BB}$. « Lorsque l'une des quantités décroît, sa fluxion est « regardée comme négative....... »

L'auteur démontre (article 712) comme il a démontré la première proposition, que *la fluxion de la racine A étant supposée* $= a$, *celle de la puissance* A^n *sera* naA^{n-1}.

A l'art. 715, il démontre cette proposition, qui est la quatrième : Soit *P le produit d'un nombre de facteurs A, B, C, D, E, etc. (ou P $= ABCDE$, etc.); soient les fluxions de P, A, B, C, D, E, respectivement égales à p, a, b, c, d, e, etc.,* $\frac{p}{P}$ *sera* $= \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D}$, *etc.* La démonstration est ainsi formulée :

« Soit Q égal au produit de tous les facteurs de « P, excepté le premier A; c'est-à-dire $P = AQ$. « Soit R égal au produit de tous les facteurs, excepté « les deux premiers A et B; c'est-à-dire $P = ABR$, « ou $Q = BR$. Soit de même $R = CS$, $S = DT$, « et ainsi de suite. Les fluxions de Q, R, S, T, etc., « étant supposées respectivement égales à q, r, s, « t, etc., il suit de l'article 708, que $\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{q}{Q} =$ « $\left(\text{parce que } \frac{q}{Q} = \frac{b}{B} + \frac{r}{R}\right) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{r}{R} = \Big($parce « que $\frac{r}{R} = \frac{c}{C} + \frac{s}{S}\Big) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{s}{S} = \Big($parce que « $\frac{s}{S} = \frac{d}{D} + \frac{t}{T}\Big) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D} + \frac{t}{T}$, et ainsi de « suite. Donc $\frac{p}{P}$ est égal à la somme des quotients où « la fluxion de chaque facteur de P est divisée par « le facteur.

« 716. Si les facteurs sont égaux entre eux, et « que leur nombre soit n, on aura $P = A^n$, et par « la dernière proposition $\frac{p}{P} = \frac{na}{A}$. Par conséquent « $p = \frac{nPa}{A} = naA^{n-1}$, comme nous l'avons trouvé, « article 712. »

A l'article 718, Maclaurin démontre cette proposition : *La fluxion des logarithmes étant supposée invariable, celles de leurs quantités N et M sont en une même proportion que ces quantités elles-mêmes.*

« Car, dit-il, la propriété fondamentale des loga-« rithmes est que, lorsqu'on les prend en progression « arithmétique, les quantités dont ils sont logarithmes « sont en progression géométrique. Donc les loga-« rithmes étant supposés croître par des différences « égales, ces quantités croîtront ou décroîtront par « des différences qui croissent ou décroissent en « même proportion que les quantités elles-mêmes. « Soient A — a, A, A + a les logarithmes respectifs « de N — n, N, N + n; et B — a, B, B + a les « logarithmes de M — m, M, M + m: puisque les « logarithmes croissent de la différence constante a, « n sera à n comme N à N + n; m à m comme M « à M + m, et n : m :: N + n : M. Donc lorsque « les quantités et leurs logarithmes croissent en-« semble, il suit de l'article 704 que si la fluxion « constante du logarithme est égale à son incrément « a, celle de N ne sera pas plus grande que n, et « celle de M ne sera pas moindre que m. Par consé-« quent la fluxion de N est à celle de M en une « raison qui n'est pas plus grande que celle de n à « m, ou de N + n à M. Mais si la fluxion de N « pouvait être à celle de M en une raison plus grande « que celle de N à M, comme en raison de N + u

« à M, alors, en supposant n moindre que u, la « fluxion de N serait à celle de M en une raison « plus grande que celle de N + n à M. Ce qui étant « contradictoire, il suit que la raison de ces fluxions « n'est pas plus grande que celle de N à M. De « même, la fluxion de M est à celle de N en une « raison qui n'est pas plus grande que celle de M à « N. Donc la raison des fluxions de M et N est la « même que celle des quantités M et N. Lorsque les « quantités décroissent, pendant que les logarithmes « croissent, la démonstration est la même.

« 719. PROPOSITION VI. *La fluxion d'une quantité « N est à celle de son logarithme comme N est au « module du système logarithmique.*

« Car les quantités et leurs logarithmes étant « supposés croître ou décroître en même temps, « lorsque la quantité croît ou décroît en même pro- « portion que son logarithme, elle est alors égale au « *module.* Supposons que cette quantité soit M. « Puisque la fluxion de N est à celle de M comme N « est à M, par le dernier article; il suit que celle de « N est à celle de son logarithme, comme N est au « *module.* Ainsi, supposant $N = A^e$, e étant un ex- « posant constant, le logarithme $N = e$, logarithme « A^e; par conséquent les fluxions de N et A étant « supposées égales à n et a respectivement,

$$« \frac{Mn}{N} = \frac{eMa}{A}, \text{ et } n = \frac{eNa}{A} = e\,A^{e-1}\,a. »$$

Considérant la fluxion d'une quantité comme variable et fluente, l'auteur détermine sa fluxion (qui est dite seconde fluxion de cette quantité) par les propositions précédentes. Et ainsi de suite pour les fluxions subséquentes.

Cette théorie me paraît devoir soulever contre elle de graves objections.

D'abord on voit que Maclaurin y suppose des accroissements ou décroissements continus, et même des augmentations ou diminutions continûment accélérées ou retardées, bien qu'il fasse abstraction du mouvement, et applique ses raisonnements à toutes sortes de quantités. Sa théorie pèche donc sous ces rapports, suivant les observations que j'ai présentées plus haut.

Mais écartons cette objection, et admettons que la fluxion de la racine A étant supposée $= u$, et par conséquent les valeurs successives de cette racine étant $A - u$, A, $A + u$, et les valeurs correspondantes du carré étant $AA - 2Au + uu$, AA, $AA + 2Au + uu$, la fluxion du carré AA ne puisse pas être plus grande que $2Au + uu$, ou moindre que $2Au - uu$. On doit l'admettre, en ce sens que ces expressions constituent l'accroissement ou le décroissement total de AA, dans la supposition où l'accroissement ou décroissement de A est u. Maintenant, si nous faisons abstraction de toute autre méthode ou théorie, voyons-nous que le carré AA, dans l'hypothèse, ne doit avoir qu'une fluxion, et que cette fluxion doit être $2Au$? Pourquoi déciderait-on *à priori* que cette unification doit avoir lieu? Pourquoi ne supposerait-on pas, toujours en oubliant toute autre théorie de calcul différentiel, que, dans l'espèce, AA a pour fluxion $2Au + uu$, ou $2Au - uu$, selon qu'on prend la fluxion de A avec le signe positif ou avec le signe négatif? D'ailleurs s'il ne doit y avoir qu'une seule expression pour la fluxion, pourquoi cette expression ne serait-elle pas ici $2Au + \frac{1}{2}u$, ou $2Au + \frac{1}{3}uu$, ou quelque autre expression intermédiaire entre $2Au - uu$ et $2Au + uu$, et autre que $2Au$?

L'auteur, il est vrai, prétend démontrer que, si l'on suppose la fluxion de AA plus grande ou moindre que $2Aa$, la fluxion de A étant a, il s'ensuivrait que la fluxion de AA, celle de A étant u, serait plus grande que $2Au + uu$, ou moindre que $2Au - uu$, ce qui est inadmissible ; mais cette démonstration est fondée sur cette donnée, que la fluxion de AA, a étant celle de A, doit être à la fluxion de AA, u étant celle de A, comme a est à u. Or pourquoi cette proportionnalité? où l'auteur voit-il qu'elle doit exister ici? Est-ce dans la méthode des fluxions, qu'il a précédemment exposée? Ce ne doit pas être, puisqu'il prétend déterminer les fluxions sans y recourir, sans l'invoquer. C'est donc arbitrairement, gratuitement, qu'il admet la proportionnalité dont il s'agit.

Ainsi, sa démonstration reposant sur des données fausses, sur des prémisses arbitraires, est sans portée, sans force, et ne peut suppléer à la méthode des fluxions dont j'ai montré les vices.

De plus, sa théorie contient, je crois, une contradiction sur un point essentiel.

D'une part, il croit prouver que la fluxion de AA, a étant supposé celle de A, est $2Aa$; que généralement la fluxion de A^n, dans la même hypothèse, est $= nA^{n-1}a$.

D'un autre côté, il professe et prétend démontrer que, dans un système logarithmique, les fluxions des quantités qui composent la progression géométrique sont en une même proportion que ces quantités elles-mêmes; et il dit positivement, on l'a vu aussi, que A^e étant supposé un terme quelconque de cette progression, sa fluxion sera $= eA^{e=1}a$, a étant la fluxion de A.

Or ces diverses conclusions sont manifestement inconciliables.

Soit, en effet, la progression géométrique d'un système logarithmique,

$$A^0 : A^1 : A^2 : A^3 : A^4 : A^5 : \text{etc.}$$

Les fluxions correspondantes des termes de cette série, l'expression générale de la fluxion A^n étant $nA^{n-1}a$, seront o, a, $2Aa$, $3A^2a$, $4A^3a$, $5A^4a$, etc.

Or o n'est pas à a comme A^o ou 1 est à A^1; a n'est pas à $2Aa$ comme A est à A^2; $2Aa$ n'est pas à $3A^2a$ comme A^2 est à A^3, et ainsi de suite.

Maclaurin, il est vrai, on l'a vu plus haut, dans son article 719, en posant $N : M :: n : m$, N et M étant des quantités de la série géométrique d'un système logarithmique, et n et m exprimant leurs fluxions respectives, est arrivé à l'égalité $m = \frac{Mn}{N}$, et, comme d'après l'article 716, qui nous reporte aux articles 715 et 708, $\frac{n}{N} = \frac{ea}{A}$, il a conclu que $\frac{Mn}{N} = \frac{eMa}{A}$, et que $n = \frac{eNa}{A} = eA^{e-1}a$, dans l'hypothèse de $N = A^e$. Mais, je le répète, il arrive à une contradiction, et cela s'explique. En effet, dans les articles 708 et 715, que j'ai reproduits textuellement, il n'a pas raisonné en admettant que les fluxions des diverses puissances de A dussent être proportionnelles à ces quantités. Rien, dans les considérations qu'il a présentées alors, n'indique qu'il ait voulu les proportions $a : 2Aa :: A : A^2$, et

$2Aa : 3A^2a :: A^2 : A^3$. Il est d'ailleurs bien visible que ces termes ne sont pas en proportion. Ainsi, l'on comprend qu'en appliquant à la détermination de la fluxion d'un terme quelconque N de la progression géométrique d'un système logarithmique, l'égalité précédemment trouvée aux articles que j'ai cités, il ne devait pas obtenir un résultat confirmant cette proposition, que les fluxions des quantités qui forment la progression géométrique sont en même raison que ces quantités.

Pourquoi aussi l'auteur enseigne-t-il que la fluxion d'une quantité N est à celle de son logarithme comme N est au module du système logarithmique? On a vu comment il raisonne pour le démontrer. Il se fonde notamment sur cette assertion que *les quantités et leurs logarithmes étant supposés croître ou décroître en même temps, lorsque la quantité croît ou décroît en même proportion que son logarithme, elle est alors égale au module.* Or, une démonstration ne peut être basée sur une telle donnée. Cette donnée impliquerait un point, un terme où un mouvement continûment accéléré ou retardé serait égal à un mouvement uniforme, ou, pour faire abstraction du mouvement proprement dit, un point où une quantité, croissant ou décroissant d'une manière continûment proportionnelle, croîtrait ou décroîtrait comme une quantité croissant uniformément, au point de vue de la célérité, de la promptitude. Or, c'est une hypothèse irrationnelle, une idée qui renferme une impossibilité. Il n'y a pas de point où un logarithme croisse comme la quantité qui lui correspond dans la série géométrique.

Maclaurin a ensuite posé des règles pour l'expression des fluxions, pour la méthode directe, et pour la méthode inverse, qui répond au calcul intégral. Cette partie de son traité reposant sur des spéculations que j'ai critiquées, ne peut, suivant moi, avoir aucun poids au point de vue rationnel.

Je n'ajouterai rien à cette critique qui suffit pour faire rejeter, comme théorie, la méthode Newtonienne et le traité que Maclaurin a consacré à son exposition. Il faut, d'ailleurs, du courage pour le suivre dans les développements de cette longue et minutieuse argumentation qu'il a eu la patience d'élaborer : il y applique constamment la méthode d'exhaustion des anciens, c'est-à-dire un tour de démonstration fort compliqué, pénible à suivre. Quant à la pratique, elle ne peut gagner non plus à l'adoption de la méthode des fluxions.

La théorie des fluxions est empreinte du génie qui la conçut, mais elle ne résiste pas à une saine critique.

§ II.

De la méthode des limites.

Cette méthode, bien considérée, est rationnelle. Dans ce jugement, je fais abstraction de quelques superfétations qu'on a ajoutées à la méthode des limites proprement dite, et dont je parlerai dans un autre chapitre.

Soit l'équation :

$$(1)\quad y = x^2,$$

et soit h un accroissement quelconque de x, on a, en exprimant par y' ce que devient y par suite de l'accroissement de x,

$$y' = (x + h)^2$$

ou, en effectuant l'opération indiquée,

$$y' = x^2 + 2xh + h^2.$$

Si de cette équation on retranche l'équation (1), il restera :

$$y' - y = 2xh + h^2.$$

Et en divisant par h,

$$(2)\quad \frac{y' - y}{h} = 2x + h.$$

Dans cette équation, $y' - y$ représente l'accroissement de la fonction y en vertu de l'accroissement h de x. L'accroissement de x étant h, l'expression $\frac{y' - y}{h}$ est donc le rapport de l'accroissement de la fonction y à celui de la variable x. Le second membre de l'équation (2) nous montre que si h diminue, le rapport $\frac{y' - y}{h}$ diminuera, et que si h devient nul, ce rapport ou, pour mieux dire, la valeur de $\frac{y' - y}{h}$ se réduira à $2x$.

On peut donc considérer ici $2x$ comme la limite du rapport $\frac{y' - y}{h}$; car c'est vers le terme $2x$ que tend ce rapport quand on fait diminuer h.

Mais, dans l'hypothèse de $h = o$, l'accroissement de y devient aussi nul; conséquemment $\frac{y' - y}{h}$ se réduit alors à $\frac{o}{o}$, et l'équation (2) devient :

$$\frac{o}{o} = 2x.$$

Ce résultat n'est pas absurde. Pour le justifier, je ne dirai pas, avec Boucharlat[1], que, « puisqu'en

1. *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, page 3.

« divisant les deux termes d'une fraction par un « même nombre, cette fraction ne change pas de « valeur, il en résulte que la petitesse des termes « d'une fraction n'influe en rien sur sa valeur, et « que par conséquent, elle peut rester la même « lorsque ses termes sont parvenus au dernier degré « de petitesse, c'est-à-dire sont devenus nuls. » Ici, en effet, on ne divise pas par un même nombre les termes de l'expression $\frac{y'-y}{h}$. Ce rapport varie continuellement par la diminution de h, et l'on anéantit à la fois les deux termes du rapport par l'hypothèse de $h = o$. L'on ne peut pas dire que la valeur de h n'influe aucunement sur la valeur du rapport. Zéro ne peut d'ailleurs être considéré comme un degré, même comme le dernier degré de petitesse. Boucharlat paie ici tribut à la chimère de l'infiniment petit, pour défendre la méthode des limites.

La note du même auteur (page 3) ne prouve pas réellement que $\frac{o}{o}$ peut représenter toutes sortes de quantités. Elle montre seulement que l'on peut arriver à une équation de la forme $x = \frac{b'-b}{a-a'}$, où $x = \frac{o}{o}$, si l'on suppose $b' = b$, et $a = a'$; mais si l'on pouvait contester la légitimité de l'équation

$\frac{y' - y}{h} = \frac{o}{o} = 2x$, dans la supposition où l'accroissement de x et celui de y deviennent $= o$, on pourrait de même contester la légitimité de l'équation $x = \frac{o}{o}$, dans l'hypothèse apportée par l'auteur à l'appui de la théorie.

Dans l'acception commune, dans le sens vulgaire du mot *diviser*, cette expression $\frac{o}{o} = 2x$ paraît inadmissible, absurde. On ne comprend pas que o divisé par o, c'est-à-dire rien divisé par rien, puisse donner quelque chose, une valeur réelle. On se dit que ce qui n'est pas ne peut être divisé, contenir une quantité, ne peut être contenu par une quantité quelconque. L'on arrive ainsi à o pour la valeur de $\frac{o}{o}$. Mais, je l'ai montré plus haut, il n'en est pas de même, si l'on prend *diviser* dans l'acception qui lui est généralement donnée en mathématiques, et d'après laquelle la division est une opération ayant pour objet de trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.

A ce point de vue, en effet, on peut dire que $\frac{o}{o}$ représente généralement toutes sortes de quantités, toutes valeurs; car, je le répète, une quantité quelconque multipliée par o, qui est ici le diviseur, donnerait o, qui est ici le dividende. Ainsi $\frac{o}{o} = 2x$. Il est vrai que $\frac{o}{o}$ égalerait aussi o, ou toute autre expression que $2x$, mais enfin on ne commet pas une absurdité mathématique en posant $\frac{o}{o} = 2x$. En ce cas la valeur de $\frac{o}{o}$ se trouve être précisée à $2x$. Dans un autre cas, elle serait différente. Ainsi, elle serait $= 3x^2$, ou $4x^3$, ou $5x^4$, etc., si l'équation proposée était $y = x^3$, ou $y = x^4$, ou $y = x^5$, etc.

Au reste, l'on fait ici ce qui est admis en algèbre, pour toute équation contenant quelque variable : alors, en effet, l'équation doit se vérifier, quelle que soit la valeur qu'on donne à la variable, cette valeur fût-elle supposée $= o$, et les équations

$$\frac{y' - y}{h} = 2x + h,\ \frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2, \text{etc.},$$

tombent sous cette règle ; car h est une variable dans ces équations.

Il y a, dans tous ces cas, une fiction, car o n'est pas une valeur réelle : il exprime la négation de toute valeur ; mais c'est une fiction logique, mathématique, qui ne peut pas plus vicier le calcul des limites qu'elle ne vicie les autres calculs où on l'emploie.

Remarquons qu'il n'y a pas ici l'irrationalité que j'ai signalée plus haut dans un raisonnement présenté par Legendre pour démontrer que les angles d'un triangle valent ensemble deux angles droits. Nous avons vu qu'après avoir trouvé pour expression d'un triangle $a'b'c'$,

$$2D + a' + b' - x',$$

il considérait que les angles a', b', x', diminuant de plus en plus, au point de s'évanouir, la formule $2D + a' + b' - x'$ devait se réduire à $2D$, qui exprimait la valeur totale des angles du triangle; mais j'ai critiqué ce raisonnement, j'ai fait observer que, dans l'hypothèse, le triangle $a'b'c'$ s'évanouissait totalement, qu'ainsi l'équation

somme des angles de $a'b'c' = 2D + a' + b' - x'$

devenait $$o = o,$$

et que si, dans la même hypothèse, on admettait que le second terme ne se réduit pas à o, mais à $2D$, il s'ensuivrait que l'équation deviendrait alors

$$o = 2D,$$

expression qui est certainement absurde : on ne peut point en dire, comme de l'expression différentielle $\frac{o}{o} = 2x$, qu'elle est mathématique.

L'expression $\frac{o}{o}$, qu'on est convenu de représenter par $\frac{dy}{dx}$, est un symbole mathématique qui remplace le rapport de l'accroissement de la fonction y à celui de la variable x.

dy, dx, dz, dv, etc., expriment donc des quantités nulles. Ainsi l'équation différentielle $dy = 2xdx$ revient en réalité à $o = o$. Et lorsqu'on dit que la différentielle de x^2 est $2xdx$, c'est en réalité, comme si l'on disait qu'elle est $= o$.

Je ne parlerai pas des procédés bien connus par lesquels on a déterminé les différentielles successives. Je n'expose pas le calcul différentiel : je le suppose connu. Je me borne à ajouter que les autres règles de la théorie des limites me paraissent logiquement établies, sauf la réserve que j'ai déjà faite à l'égard de certaines spéculations irrationnelles dont j'aurai occasion de m'occuper.

On sait que Maclaurin et Taylor ont produit deux théorèmes dont les formules sont plus ou moins utiles. Celui de Taylor est d'un fréquent usage. On sait aussi que ce théorème est en défaut dans un cas qu'on a exprimé ainsi : *Lorsqu'on fait* x $= a$, *dans le développement de* f (x + h) *de la formule de Taylor, s'il existe une puissance fractionnaire de* h *dans ce développement et qu'elle soit comprise entre les* *termes affectés de* h^n *et de* h^{n+1}, *on ne pourra déterminer les termes de la série de Taylor, que jusqu'à l'ordre* n *inclusivement : tous les autres termes deviendront infinis.*

D'après mon interprétation des expressions de la forme $\frac{A}{o}$, il faut dire : *Tous les autres termes deviendront impossibles, absurdes.*

Au reste, les formules de Taylor et de Maclaurin résultent du calcul différentiel, sans impliquer une méthode particulière pour arriver à la différentiation.

La critique n'a point complétement épargné la méthode des limites, mais je crois que les explications que j'ai données suffisent pour faire repousser les reproches dont cette méthode a été l'objet.

Il est toutefois une objection dont je crois devoir m'occuper particulièrement.

On a objecté que l'expression $\frac{o}{o}$ étant indéterminée, le rapport représenté par $\frac{y'-y}{h}$ devrait nécessairement être indéterminé, dans l'hypothèse de $h=o$.

Lacroix, dans son savant *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* a cru détruire cette objection par les considérations suivantes :

« Je ne vois pas, dit-il, qu'on ait besoin de consi-« dérer le rapport des accroissements k [1] et h lors-« qu'ils s'évanouissent, ni de chercher à concevoir « comment les quantités peuvent garder un rapport « lorsqu'elles cessent d'exister. La limite d'un rap-« port n'est point le rapport lui-même, mais une « quantité dont il peut approcher d'aussi près qu'on « voudra. Or cela est exactement vrai à l'égard du « rapport $\frac{k}{h}$, sans que k ni h soient nuls ; ainsi l'ob-« jection n'attaque donc point le calcul des limites « en lui-même. »

Je ne puis adhérer à ce raisonnement de Lacroix. Pour le renverser, on dira : « Ou bien l'équation $\frac{o}{o} = \frac{k}{h}$ est juste, mathématique, ou elle ne l'est pas. Dans cette dernière hypothèse, il faut la rejeter, et alors croule toute la théorie des limites : à ce point de vue, l'on pourrait douter de l'exactitude de ses résultats, des résultats obtenus en passant à la limite. Si, au contraire, l'équation $\frac{o}{o} = \frac{k}{h}$ est juste, on peut bien dire que $\frac{o}{o}$ exprime un rapport mathématique. D'ailleurs, que ce soit ou non un rapport,

[1] Il représente par k ce que j'ai représenté par $y' - y$.

si l'on admet que l'équation est juste, l'on admet qu'une quantité indéterminée peut égaler une quantité déterminée. » — La réponse de Lacroix ne réfute donc point l'objection.

La vraie réponse est dans cette considération que j'ai présentée plus haut : $\frac{0}{0}$, mathématiquement, peut égaler une quantité quelconque ; il n'y a donc point d'irrationalité à la regarder comme égale précisément à telle quantité déterminée, en tel cas.

Lacroix ajoute que l'objection n'a pas plus de prise sur les applications du calcul des limites, parce qu'elles n'ont pour objet que de comparer des rapports de lignes, qui peuvent différer aussi peu qu'on voudra de ceux qu'on cherche, et que les géomètres anciens, sur l'exactitude desquels on n'élève aucun doute, ont toujours regardé comme égales deux grandeurs dont la différence était moindre qu'aucune grandeur donnée.

A cet égard, je dirai qu'il ne saurait y avoir vraiment une différence moindre que toute grandeur qui pourrait être donnée : Si des grandeurs diffèrent, leur différence, connue ou inconnue, doit être telle qu'il puisse, au contraire, y avoir une quantité plus petite que cette différence. — Si, dans tel cas on arrivait à voir qu'une différence ne serait admissible entre telles grandeurs qu'autant que cette différence serait moindre que toute quantité donnée, on devrait en conclure qu'elles sont égales, en se fondant précisément sur ce qu'une différence réelle ne peut être moindre que toute quantité qu'il serait possible de donner. Mais il n'est pas besoin de recourir à ces considérations, pour justifier la méthode des limites ; elle ne repose pas sur la conception invoquée ici par Lacroix.

§ III.

De la méthode des infiniment petits.

Cette méthode a été en butte à des reproches bien mérités. Toutefois, c'est en général avec timidité, avec réserve, qu'on a contesté la légitimité de cette monstrueuse théorie. La plupart des mathématiciens qui l'ont jugée, se sont bornés à dire que l'hypothèse d'infiniment petits, et surtout d'infiniment petits de différents ordres était *difficile à admettre*, *répugnait à l'esprit*, était *bien dure pour des oreilles mathématiques.* Ce qui a contenu la critique que devait susciter une telle méthode, c'est que, par elle, on arrive à des résultats vrais, ou qui étaient considérés comme tels, même avant cette ingénieuse création. Les mathématiciens semblent n'avoir pu s'arrêter à l'idée que des règles fausses pussent logiquement conduire à des vérités, à des conclusions acceptées par la raison. Et puis, la méthode des infiniment petits est d'une application commode et prompte : c'était encore un motif pour la défendre ou l'épargner. On s'explique donc le doute ou le silence où se sont retranchés bien des mathématiciens au sujet de la légitimité des infiniment petits et de leur application aux calculs différentiel et intégral.

Les infiniment petits de Leibnitz ont trouvé de fermes défenseurs. Plusieurs géomètres ont considéré comme rationnel ce système incroyable. On a voulu justifier l'infiniment petit, l'infiniment petit relatif, tel que l'admet la méthode Leibnitienne, ou tenté de le rendre plus acceptable.

Boucharlat, dans son *Traité de calcul différentiel*, a entrepris de *donner pour base à la méthode des infiniment petits un autre principe qui*, dit-il, *également fondé sur les notions que nous avons de l'infini, satisfait plus la raison par l'idée de limite qu'il renferme tacitement.*

Voici comment il s'exprime, page 162, pour établir cet autre principe qu'il a promis :

« Les notions que nous avons de l'infini se réduisent à cette proposition : Une quantité n'est pas « infinie lorsqu'elle est susceptible d'augmentation. « Par conséquent, si l'on a $x + a$, et que x devienne

« infini, il faut supprimer a, autrement ce serait « supposer que x peut encore s'augmenter de a, ce « qui est contre notre définition.

« Cette proposition étant fondamentale, j'ai « cherché à la démontrer d'une manière plus satis- « faisante, comme il suit : Soit l'équation

$$(149)\quad x + a = y,$$

« dans laquelle a est une quantité constante. Nous « pouvons, à l'aide d'une indéterminée m, repré- « senter par ma le rapport des variables y et x, ou, « ce qui revient au même, supposer

$$(150)\quad max = y,$$

« substituant cette valeur dans l'équation (149) on « obtient :

$$(151)\quad x + a = max;$$

« divisant tous les termes de l'équation (151) par « ax, on a :

$$(152)\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{x} = m;$$

« quand x devient infini, la fraction $\frac{1}{x}$ ayant at- « teint à son dernier degré de décroissement, se

« réduit évidemment à zéro ; alors l'équation (152)
« devient

$$m = \frac{1}{a}.$$

« Cette valeur étant substituée dans l'équation (151),
« on obtient :

$$x + a = x,$$

« ce qui montre que quand x est infini, $x + a$ se
« réduit à x. »

Cette demonstration ne satisfait point ma raison. On voit qu'elle s'appuie sur ce que, quand x devient infini, la fraction $\frac{1}{x}$, ayant atteint son dernier degré de décroissement, se réduit à zéro ; ce qui n'est pas, logiquement, rationnellement, acceptable. L'unité, une quantité finie quelconque ne peut être divisée par l'infini ; car si l'on suppose au quotient une valeur réelle quelconque, cette valeur, multipliée par l'infini, produira l'infini. Si l'on suppose que le quotient $= o$, alors il faudra qu'une infinité de zéros vaillent l'unité, ou le nombre fini qui est le dividende. La démonstration porte donc sur une hypothèse absurde.

Au reste, il est inutile de démontrer que l'infini ne saurait s'accroître, que l'infini plus a, quelle que soit la valeur de a, ne vaut que l'infini. Cela est évident par soi-même.

Partant de cette proposition, que x étant infini, $x + a$ se réduit à x, Boucharlat dit que la quantité a, à l'égard de laquelle x est infini, est ce qu'on appelle un infiniment petit par rapport à x. Puis, alléguant que l'on ne considère ici que les *rapports des quantités*, il étend le bénéfice de sa démonstration au cas même ou x a une *valeur finie*, pourvu seulement, ajoute-t-il, que a soit infiniment petit par rapport à x.

Il est certain qu'une quantité n'est petite ou grande que relativement à quelque autre à laquelle on la compare. En soi, une quantité n'est ni petite ni grande; mais il ne s'ensuit point qu'une quantité puisse être infiniment petite relativement à un autre quantité.

J'accorde que si l'infini était possible, admissible rationnellement, on pourrait dire que toute quantité finie est infiniment petite relativement à cette quantité infinie : on le dirait en ce sens que, si grande que fût une quantité finie, elle serait comprise une infinité de fois dans l'infini, conséquemment tout autant de fois que le serait une quantité aussi petite qu'on voudrait la supposer. Cependant on ne peut pas en conclure qu'une quantité finie est nulle, est zéro relativement à l'infini; car prenez une infinité de fois le nombre fini, si petit qu'il soit, et vous aurez l'infini; mais supposez zéro pris une infinité de fois, et le résultat sera zéro. Le fini ne serait donc pas nul par rapport à l'infini ; on pourrait le considérer comme un élément de l'infini, comme un élément qui, relativement, serait infiniment petit.

Mais de là à la supposition d'un infiniment petit relativement à une quantité finie, à une quantité non infiniment grande, il y a un abîme.

La raison proclame qu'un infiniment petit n'est possible à aucun égard; que toute quantité finie étant divisible, on peut toujours en supposer une plus petite qu'elle. En admettant l'infiniment petit, il serait absurde d'admettre des infiniment petits de divers ordres, des infiniment petits d'infiniment petits. Dire que telle quantité b est infiniment petite relativement à a, c'est-à-dire que b a le dernier degré de petitesse relativement à a; mais comment supposer cela, si on suppose qu'une autre quantité c est infiniment petite par rapport à b? Il y a ici une contradiction palpable. Évidemment, si c est infiniment plus petit que b, b n'est pas le dernier degré de petitesse relativement à a. Cette contradiction serait manifeste alors même qu'on traduirait l'idée d'infiniment petit par celle de quantité moindre que toute quantité assignable.

Boucharlat, pour justifier la doctrine, invoque la théorie des fractions, où il croit trouver un appui :

« Si, dit-il, on compare la quantité finie b à la frac-
« tion $\frac{b}{z}$, il est certain que plus le dénominateur z
« augmentera, plus la fraction diminuera; de sorte
« que, quand z deviendra infini, cette fraction de-
« viendra *absolument nulle*, et, comme telle, devra
« être supprimée devant b, qui alors sera infini à
« l'égard de $\frac{b}{z}$. »

Cette preuve croule en présence de ce que j'ai dit tout à l'heure de l'absurdité d'une quantité finie divisée par l'infini. Je répète d'ailleurs que si une telle division était admissible, le quotient ne pourrait être nul, car, encore une fois, zéro multiplié par l'infini ne peut produire une quantité réelle b.

L'auteur invoque les fractions en faveur des infiniment petits; moi, je les invoque contre cette fausse théorie, à un point de vue opposé. — Je dis: Si l'on compare la quantité b à la fraction $\frac{b}{z}$, il est certain que plus le dénominateur augmentera, plus la fraction diminuera, et que ce dénominateur pourra augmenter toujours sans jamais arriver à l'infini; donc il n'y a pas de terme à la diminution possible de $\frac{b}{z}$; donc l'infiniment petit relatif au fini est une chimère.

Il n'y a pas d'infiniment petit relatif; il ne pourrait y en avoir que relativement à l'infini dans le sens que j'ai indiqué, et l'infini lui-même est impossible.

Remarquons que si, un instant, l'on dévorait l'impossibilité d'une quantité divisée par l'infini, et que l'on consentît à croire que $\frac{b}{\infty} = 0$, il s'ensuivrait que $\frac{b}{\infty}$ est nul, *absolument nul*, et conséquemment l'est relativement à toute quantité. — Comment donc, si une quantité quelconque divisée par ∞ est égale à zéro, et exprime une quantité infiniment petite aussi quelconque, comment admettre des infiniment petits relatifs de divers ordres? Est-ce que *zéro* peut être un infiniment petit relativement à *zéro?* Non certes! car $0 = 0$. Encore ici la logique est en défaut, d'autant plus en défaut que l'auteur dit que, *quand* z *deviendra infini*, la fraction $\frac{b}{z}$ deviendra *absolument nulle*, bien qu'il la regarde comme un infiniment petit *relatif* à b : ce qui implique contradiction.

Rien ne peut justifier les principes de la méthode dont je m'occupe. Ils sont faux, manifestement contraires à la raison. Cette méthode ne vaut rien comme théorie, comme démonstration du calcul différentiel et du calcul intégral. Elle conduit à des vérités, mais cela ne prouve point la justesse de ses principes. Elle est en certains cas, plus expéditive que celle des limites : je conçois qu'on l'applique alors, mais il faut toujours la rejeter, la condamner au point de vue doctrinal.

On dit qu'elle n'est qu'une abréviation de celle des limites. J'accorde qu'elle peut être plus prompte que celle-ci; mais de ces deux méthodes, l'une est fausse, l'autre est rationnelle, et elles procèdent par des voies très-différentes.

Si l'on veut, par exemple, trouver, par la méthode des infiniment petits, la différentielle de x^3, dx étant la différentielle de x, que fait-on alors? On retranche x^3 de $(x+dx)^3$ développé, et l'on a, après la soustraction, $3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$; puis, l'on raisonne ainsi : dx^3, étant un infiniment petit du troisième ordre, ne peut augmenter $3xdx^2$, il faut donc effacer dx^3; $3xdx^2$, étant un infiniment petit du second ordre doit être aussi effacé, parce que $3x^2dx$ en est un de premier ordre : la différentielle de x^3 est donc réduite à $3x^2dx$, résultat conforme à celui que donne la théorie des limites; mais cette théorie est loin de procéder comme la méthode des infiniment petits.

Il est visible que, dans l'application de la méthode infinitésimale, on est obligé de considérer les grandeurs, les quantités ou figures, comme formées d'infiniment petits d'un ou de plusieurs ordres.

§ IV.

De la méthode des fonctions analytiques.

Cette méthode, trouvée par Lagrange, est une œuvre très-savante qui est venue confirmer les résultats obtenus par les autres théories du calcul différentiel et du calcul intégral.

Lagrange voulut démontrer les principes de ces calculs, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Il n'entre point dans mon cadre d'exposer complétement cette longue théorie. Voici le raisonnement qui en établit la base.

Après avoir montré que, dans la série résultant du développement de la fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières, Lagrange continue ainsi :

« On voit d'abord que si on cherche dans cette « fonction $f(x+i)$ ce qui est indépendant de la « quantité i, il n'y a qu'à faire $i=o$, ce qui la « réduit à fx. Ainsi, fx est la partie de $f(x+i)$ « qui reste lorsque la quantité i devient nulle. De

« sorte que $f\,(x+i)$ sera égale à fx plus à une « quantité qui doit disparaître en faisant $i=o$, et « qui sera par conséquent ou pourra être censée « multipliée par une puissance positive de i : et « comme nous venons de démontrer que, dans le « développement de $f\,(x+i)$, il ne peut entrer « aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit « que la quantité dont il s'agit ne pourra être mul-« tipliée que par une puissance positive et entière « de i; elle sera donc de la forme $i\mathrm{P}$, P étant une « fonction de x et i, qui ne deviendra point infinie « lorsque $i=o$.

On aura donc ainsi $f\,(x+i)=fx+i\mathrm{P}$, donc « $f\,(x+i)-fx=i\mathrm{P}$, et par conséquent divi-« sible par i; la division faite, on aura :

$$\mathrm{P}=f\,\frac{(x+i)-fx}{i}.$$

« Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on « pourra de même en séparer ce qui est indépendant « de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas lors-« que i devient nul. Soit donc p ce que devient P « lorsqu'on fait $i=o$, p sera une fonction de x sans « i, et par un raisonnement semblable au précédent, « on prouvera que $\mathrm{P}=p+i\mathrm{Q}$, $i\mathrm{Q}$ étant la partie « de P qui devient nulle lorsque $i=o$, et Q étant

« une nouvelle fonction de x et i, qui ne devient « pas infinie lorsque $i = o$.

« On aura donc $P - p = iQ$, et par conséquent « divisible par i; la division faite, on aura $Q = \frac{P - p}{i}$.

« Soit q la valeur de Q, en y faisant $i = o$, q sera « une fonction de x sans i; et la partie de Q qui « devient nulle lorsque i devient nul, sera, comme « ci-dessus, de la forme iR, R étant une fonction « de x et de i, qui ne deviendra pas infinie quand « $i = o$, et qu'on trouvera en divisant $Q - q$ par « i, et ainsi de suite.

« On aura, par ce procédé, $f(x + i) = fx + iP$, « $P = p + iQ$, $Q = q + iR$, $R = r + iS$, etc.; « donc substituant successivement, $f(x + i) =$ « $fx + iP = fx + ip + i^2Q = fx + ip + i^2q$ « $+ i^3R =$ etc.; ce qui donnera, pour le déve- « loppement de $f(x + i)$, une série de la forme « que nous avons supposée au commencement.

« Soit, par exemple, $fx = \frac{1}{x}$, on aura $f(x + i)$ « $= \frac{1}{x + i}$; donc $iP = \frac{1}{x + i} - \frac{1}{x} = - \frac{i}{x(x+i)}$; « $P = - \frac{1}{x(x + i)}$; $p = - \frac{1}{x^2}$; $iQ = - \frac{1}{x(x + i)}$ « $+ \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x + i)}$; $Q = \frac{1}{x^2(x + i)}$; $= \frac{1}{x^3}$;

« $iR = \frac{1}{x^3(x+i)} - \frac{1}{x^3} = \frac{i}{x^3(x+i)}$; $R =$
« $\frac{1}{x^3(x+i)}$; $r = -\frac{1}{x^4}$, etc. Ainsi, on aura :
« $\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)} = \frac{i}{x} - \frac{i}{x^2} +$
« $\frac{i^2}{x^2(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} - \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^3 \cdot (x+i)} =$ etc.,
« comme il résulte de la division actuelle. »

L'auteur ensuite montre que, dans la série $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ etc., qui naît du développement de $f(x+i)$, on peut tonjours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent ; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites que i. — C'est là un des principes fondamentaux de la théorie.

A ce sujet, Lagrange dit qu'on suppose tacitement ce principe dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions, et que c'est par cet endroit que ces calculs donnent le plus de prise sur eux, surtout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques.

Ce reproche, adressé par Lagrange aux autres théories, n'est pas bien fondé. En effet, pour démontrer le principe dont il s'agit, il n'est pas nécessaire de recourir à la méthode de l'auteur, ni même de considérer les valeurs des coefficients différentiels.

Soit la série $fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots$ quelles que soient les valeurs des coefficients p, q, r, s, etc., l'on peut donner à h une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. Car soit, par exemple, qh^2 ce terme, on peut écrire ainsi la partie sérielle comprise depuis qh^2 :

$$(q + rh + sh^2 + \ldots\ldots)h^2.$$

Maintenant, si l'on suppose $h = o$, la partie $rh + sh^2 + \ldots$ s'anéantit, et le terme q, qui est indépendant de h, persiste seul. Or, comme on peut prendre h aussi près de zéro qu'on le veut, l'on peut rendre la partie $rh + sh^2 + \ldots\ldots$ assez petite pour qu'elle soit surpassée par q; on aura donc alors

$$q > (rh + sh^2 + \ldots\ldots)$$

et par conséquent $Q \times h^2 > [(rh + sh^2 + \ldots\ldots) \times h^2]$

$$\text{ou } qh^2 > (rh^3 + sh^4 + \ldots\ldots)$$

Une démonstration analogue pourrait s'appliquer à tout autre terme de la série à l'égard des termes suivants. Ce procédé est bien plus simple et plus prompt que celui de Lagrange.

Cherchant comment les fonctions dérivées p, q, r, s, etc., dépendent de la fonction primitive fx, il arrive à conclure (d'après sa notation, qui exprime la première fonction dérivée d'une quantité par un accent joint à cette quantité) que $p = f'x$, $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, etc., et pour plus de simplicité et d'uniformité, dénotant par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, il a $p = f'x$, et de là $p' = f''x$; donc $q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}$; donc $q' = \frac{f'''x}{2}$, et de là $r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3}$; donc $r' = \frac{f^{\text{iv}}x}{2.3}$, et de là $s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{\text{iv}}x}{2.3.4}$, et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, il trouve

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x^3}{2.3}i^3 + \frac{f^{\text{iv}}x}{2.3.4}i^4$$

$+$ etc....., formule qui revient à celle de Taylor; car $f'x$, qui est le coefficient de i dans le développement de $f(x+i)$, est précisément ce qu'on désigne par $\frac{d.fx}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx}$; de même, le coefficient $f'x$ de la première puissance de x dans le développement de $f(x+i)$, est exprimé par $\frac{df'x}{dx}$, c'est-à-dire par $\frac{\frac{d.dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, et ainsi de suite.

Lagrange a-t-il bien réussi dans son entreprise? Sa méthode remplit-elle son programme : démontrer les principes des calculs différentiel et intégral, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions?

Dans la partie fondamentale que j'ai reproduite, Lagrange, on la vu, suppose d'abord que $f(x+i) = fx + iP$, P étant une nouvelle fonction de x et i; puis, de cette fonction nouvelle de x et i, exprimée par P, il sépare ce qui est indépendant de i, et qui, dit-il, *ne s'évanouit pas lorsque i devient nul;* appelant p ce que devient P lorsqu'on fait $i = o$, il pose l'équation $P = p + iQ$, iQ étant la partie de P qui *devient nulle* lorsque $i = o$, et Q étant une nouvelle fonction de x et i; et ainsi de suite; mais ici, en définitive, il n'y a pas de quantité évanouissante; l'on a une série de termes qui persistent tous tant que i a une valeur réelle : l'on n'y considère pas la limite du rapport des accroissements de y et de x. La méthode atteint vraiment son but.

Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel*, est arrivé, par les fonctions analytiques, aux mêmes résultats que Lagrange, sans supposer d'abord, comme ce géomètre, des quantités P, Q, R, etc., décomposées en fonctions de x et i, et en d'autres quantités p, q, r, etc., fonctions de x sans i, persistant quand i égale zéro. Dans la fonction x^n, mettant $(x + k)$ au lieu de x, il a de suite posé le développement de $(x + k)^n$ donné par la formule du binôme, et observé que ce développement a pour premier terme la fonction proposée x^n; qu'il donne naissance à une suite de fonctions nx^{n-1}, $\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}$, etc., qui multiplient les différentes puissances de k; que ces fonctions doivent être regardées comme dérivées de la fonction proposée, par la transformation qu'on lui a fait subir, et que leur considération est absolument indépendante de la valeur de k. Puis, il a cherché et reconnu la loi qui préside à la formation des fonctions dérivées.

Au reste, ces deux procédés sont rationnels, mais la théorie des fonctions analytiques est loin d'être aussi simple, aussi facile à saisir et à retenir que celle des limites et des infiniment petits; elle nécessite et comprend des développements compliqués, des règles subtiles.

CHAPITRE XI

DES APPLICATIONS RATIONNELLES ET DES APPLICATIONS IRRATIONNELLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL. — DES COURBES RATIONNELLES ET DES COURBES IRRATIONNELLES.

Le calcul différentiel a des applications justes, rationnelles. Ainsi, c'est logiquement et rationnellement que l'on obtient, par le calcul des limites, pour l'expression générale de la sous-tangente, $\frac{ydx}{dy}$; pour celle de la sous-normale, $\frac{ydy}{dx}$; pour celle de la tangente, $y\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2}+1}$, et pour celle de la normale, $y\sqrt{\frac{dy^2}{dx^2}+1}$.

La méthode des infiniment petits donne les mêmes résultats, mais elle ne les donne pas rationnellement, puisque elle-même est irrationnelle.

Par la méthode de Lagrange, on détermine aussi d'une manière très-rationnelle les expressions dont je viens de parler.

Ainsi encore, la raison peut reconnaître plusieurs spéculations relatives aux *maxima* et *minima*, et sous le rapport théorique et au point de vue pratique; mais la théorie des *maxima* et *minima* a été souvent irrationnelle dans son application.

On peut rationnellement déterminer, par le calcul différentiel, les points d'inflexion et de rebroussement, les points multiples, les points conjugués, les courbes osculatrices.

De même le calcul intégral est rationnel en plusieurs de ses parties.

Mais nous allons voir que ces calculs se sont fort égarés, théoriquement, et se sont jetés dans une foule d'applications qui blessent la raison mathématique.

Ce n'est point sans faire brèche à la raison qu'on a déterminé la différentielle du sinus d'un arc x.

Pour y parvenir, on a d'abord admis, prétendu démontrer que l'arc est plus grand que le sinus et plus petit que la tangente. Puis, on a dit: « Il en « résulte que la limite du rapport du sinus à l'arc est « l'unité; car, lorsque l'arc h devient nul, le sinus « se confondant avec la tangente, à plus forte raison « le sinus se confond avec l'arc qui est compris entre « la tangente et le sinus; par conséquent on a, dans « le cas de la limite, $\frac{\sin h}{h} = 1$. »

Puis, au moyen de cette égalité et d'autres principes trigonométriques, on a trouvé :

$$d.\sin x = dx \cos x.$$

Cette démonstration n'est point satisfaisante, car, rationnellement, il n'est point de rapport de quantité entre un arc et sa corde, entre l'arc, le sinus et la tangente, et ainsi se trouvent infirmés les principes mêmes sur lesquels le raisonnement s'appuie. Quand je supposerais un rapport de quantité entre l'arc, le sinus et la tangente, je ne saurais admettre le raisonnement par lequel on établit que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité. A la limite, il n'y a ni arc, ni sinus, ni tangente : nous n'avons pas ici, entre ces grandeurs, une équation dans laquelle une variable, égalée à o, détermine la limite de leur rapport : c'est donc gratuitement que cette limite est considérée, en ce cas, et qu'elle est regardée comme égale à l'unité. Si l'on exprime le rapport en question, considéré à la limite, par $\frac{o}{o}$, la limite donne alors au rapport une valeur indéterminée, une valeur qui n'est pas précisément l'unité.

L'on a cru pouvoir aussi déterminer la différentielle de $\sin x$, par un procédé géométrique; on a dit : « Soit AB (fig. 37), l'arc x; BM, l'arc h; la « perpendiculaire BP sera donc $\sin x$, et la perpen- « diculaire MQ sera $\sin(x + h)$. Cela posé, plus l'arc

« $BM = h$ diminue, plus l'angle MBC tend à deve-
« nir droit; par conséquent, dans le cas de la limite,
« on peut considérer l'angle MBC comme droit;
« alors le triangle MBD devient semblable au trian-
« gle BCP, puisque dans cette circonstance, ces
« triangles ont leurs côtés perpendiculaires; d'où il
« suit qu'on a la proportion

$$BC : CP :: BM : MD,$$

« ou $\quad r : \cos x :: BM : \sin(x+h) - \sin x;$

« donc $\quad \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{BM} = \dfrac{\cos x}{r}.$

« Passant à la limite et observant que, dans « ce cas, la corde BM peut être remplacée par « l'arc $BM = h$, l'équation précédente deviendra « $\dfrac{d.\sin x}{dx} = \dfrac{\cos x}{r}$, et en prenant le rayon égal à « l'unité, $\quad d.\sin x = dx \cos x.$ »

Est-il besoin de dire que cette démonstration n'est point rationnelle, que la fiction ne peut aller jusqu'à admettre que, dans le cas où l'arc BM diminuant de plus en plus, devient enfin nul, et que, par suite, le point M se confond avec B, il y ait encore un triangle BMD, un triangle rectangle en B, qui serait infiniment petit, ou en un point indivisible? Ces conceptions-là, bien fausses, ne doivent point avoir place dans la science.

On a obtenu plus simplement, mais irrationnellement, la différentielle du sinus en posant $\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x$, et en regardant dx et $\sin dx$ comme infiniment petits.

La différentielle du sinus a été aussi déduite du sinus et du cosinus développés suivant les puissances de l'arc : développement irrationnel.

On a trouvé, pour la différentielle de $\cos x$, $-dx \cos x$. Cette différentielle a été déduite de celle de $\sin x$, ou directement obtenue par un procédé irrationnel.

L'on voit combien de spéculations se trouvent irrationnelles, par l'irrationalité de ces expressions.

La raison a encore fait essentiellement défaut quand on a voulu déterminer la différentielle d'un arc de courbe.

On a fait ce raisonnement :

« Supposons qu'une abscisse $AP = x$ (fig. 38) « s'accroisse de $PP' = h$; si nous menons la parallèle MO à l'axe des x, nous aurons
« corde $MM' = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{M'O}^2} = \sqrt{h^2 + \overline{M'O}^2}$;
« or

$$M'O = f(x + h) - fx = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \dots$$

« Substituant cette valeur dans l'expression de MM',

« et représentant par A, par B, etc., les coefficients « de h^3, de h^4, etc., on aura

$$MM' = \sqrt{h^2 + \frac{dy^2}{dx^2} h^2 + Ah^3 + Bh^4 + \ldots\ldots}$$

« ou

$$MM' = \sqrt{h^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + Ah^3 + Bh^4 + \ldots\ldots}$$

« donc

$$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

« Dans le cas de la limite, la corde se confond « avec l'arc; de sorte que nous aurons, en représen- « tant l'arc par s,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

« d'où nous tirerons, en multipliant par dx,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \text{»}$$

Cette démonstration implique un rapport de quantité entre la corde et son arc, rapport impossible. L'on n'est pas fondé à remplacer la corde MM' par l'arc s dans l'équation

$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, à laquelle se réduit l'équation $MM' = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \ldots\ldots}$, en faisant $h = o$. Ici, en effet, l'on n'a pas d'équation entre s ou arc MM′ et la corde MM′ ; l'on n'a et ne peut avoir aucune expression d'où on puisse tirer l'équation $ds =$ différentielle de corde MM′. Rien n'autorise donc à assimiler la différentielle de s à celle de la corde. Vainement on dirait qu'au point M l'arc s est nul tout comme la corde. Oui, s est nul au point M, et il est nul comme sa corde, mais il est nul comme le serait à ce point toute autre corde, tout autre arc, toute autre courbe.

L'on est arrivé à l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ par d'autres procédés irrationnels par eux-mêmes, et dont il sera facile de voir les irrationalités, d'après ce qui précède.

D'ailleurs, la différentielle d'un arc ne saurait être exprimée en fonctions quelconques de droites ; réciproquement, la différentielle d'une droite ne peut être exprimée en fonctions d'un arc.

Avec cette expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ tombe celle qu'on a obtenue pour la différentielle d'un arc, quand les coordonnées sont polaires.

Rejetons aussi théoriquement les déterminations des sous-tangentes, sous-normales, normales et tangentes aux courbes polaires, qui ont été obtenues par des procédés analogues à ceux que je viens de critiquer, et qui sont d'ailleurs fondées notamment sur la fausse expression différentielle de l'arc.

Appliquant l'équation $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ à un arc de la développée, dont les coordonnées sont α et β, on a conclu que la différentielle de cet arc est

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

Et comparant cette expression à celle-ci :

$$d\gamma = - \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2},$$

expression obtenue pour le rayon de courbure, on est arrivé à cette conséquence, que, si le rayon de courbure augmente, s diminue d'autant, ce qu'on énonce en disant que *le rayon de courbure varie par les mêmes différences que la développée.*

Or, cela est irrationnel, car on ne peut légitimement comparer sous le rapport de la quantité une courbe et une droite, un arc et un rayon de courbure. On voit d'ailleurs que la démonstration repose sur l'expression irrationnelle obtenue...... $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

N'est donc pas plus légitime cette proposition qu'on déduit de ce qui précède : *La différence de deux rayons de courbure est égale à l'arc qu'ils* *comprennent entre eux.* Un tel rapport blesse évidemment la raison.

On peut admettre une développée en ce sens qu'on peut supposer rationnellement une courbe A telle que tous les rayons de courbure d'une autre courbe B, rayons qu'on pourra faire partir de divers points quelconques de cette dernière, viendront aboutir à la courbe A ; mais on ne peut pas admettre une développée comme formée vraiment des points extrêmes de ces rayons de courbure, ces points fussent-ils même supposés en nombre infini (nombre impossible) ; et, rationnellement, une développée ne saurait égaler en longueur aucune droite. L'équation de la développée est du reste admissible.

Il est visible, par ce qui précède, que les parties du calcul intégral où il s'agit d'intégrations par arc de cercle, d'intégrations des fonctions de sinus, cosinus, etc., ne sauraient être rationnelles.

Ne sont point rationnelles les parties si importantes du calcul intégral où l'on détermine la quadrature d'une courbe, l'aire et la cubature des solides de révolution. Elles pèchent essentiellement en ce qu'on y met en rapport de quantité l'étendue d'une surface plane curviligne avec celle d'une surface plane rectiligne, l'étendue d'une surface courbe avec celle d'une surface plane, le volume d'un solide à surface courbe avec celui d'un solide à surface plane.

On a le tort, dans la partie relative aux solides de révolution, d'assimiler la différentielle de l'arc à celle de sa corde, en alléguant qu'à la limite l'arc et sa corde se confondent : j'ai déjà relevé ce qu'il y a de gratuit et de faux dans ce procédé.

De plus, on y commet l'erreur de supposer un rapport de quantité entre des cylindres de courbures différentes.

Les procédés, quels qu'ils soient, employés pour les déterminations de ce genre ne sauraient couvrir l'impossibilité des rapports supposés entre des quantités non homogènes. —Les intégrales doubles elles-mêmes ne peuvent changer la nature des choses.

Ayant trouvé, pour l'expression générale de la différentielle d'un arc de courbe $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, il s'agit, pour obtenir la rectification d'une courbe dont l'équation est donnée entre deux variables x et y, de différentier cette équation, d'en tirer la valeur de dx ou de dy, de substituer cette valeur dans l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui ne contiendra plus qu'une variable, et si son intégration est possible, on dit que la courbe est rectifiable.

Mais, outre que l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ne saurait être exacte, toute rectification de courbe est chimérique; car une droite ne saurait égaler une courbe.

Ainsi, aucune courbe n'est vraiment rectifiable. Celles dites *sections coniques* ni celles d'ordre supérieur ne sauraient être évaluées ni représentées, dans leur longueur, par des droites.

Je pourrais critiquer encore d'autres inexactitudes, d'autres irrationalités des calculs différentiel et intégral, qui rentreraient, en général, dans celles que j'ai signalées, soit dans ce chapitre, soit dans les précédents.

A part leurs quadratures, rectifications et différentiations, il est des courbes que je considère comme rationnelles; telles sont les sections coniques; telles sont aussi certaines courbes de divers ordres, comme la *conchoïde* de Nicomède, la *cissoïde* de Dioclès, la *logarithmique;* mais il n'en est pas ainsi de plusieurs courbes transcendantes, de la *cycloïde*, de la *spirale logarithmique*, de la *spirale d'Archimède*, de la *spirale parabolique*, de la *spirale hyperbolique*, de la *quadratrice*. Ces courbes et d'autres encore sont irrationnelles sous quelques rapports. Je vais montrer les irrationalités relatives aux courbes transcendantes que je viens de nommer.

1° La cycloïde (ou roulette). L'équation de cette courbe a reçu diverses expressions. On l'a exprimée par

1° $y = u + \sin u$, ou plus généralement $y = \frac{b}{a}$ $u + \sin u$;

2° $dy = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}$;

3° $x = \text{arc} (\sin = \sqrt{2ay - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2}$.

Dans la première de ces équations, y exprime l'ordonnée MP (fig. 39), et u représente un arc BIO, égal à la partie MO de cette ordonnée. L'équation établit donc un rapport de quantité entre des droites y et $\sin u$, et un arc u; rapport impossible.

La seconde équation, ou x est l'abscisse AP (fig. 40), y l'ordonnée PM, et $2a$ le diamètre BR, a été obtenue en supposant $x = \text{arc MR} - \text{ME}$, égalité impossible, et en faisant usage de la formule $d. \sin z = dz \cos z$, qui a été obtenue irrationnellement, ainsi qu'on l'a vu plus haut.

Quant à la troisième équation, qui exprime la valeur de l'abscisse x (qui est une droite) en fonction de l'arc, elle est évidemment irrationnelle, au point de vue de l'hétérogénéité.

Il est visible que les expressions de la normale, de la sous-normale, du rayon de courbure et de la développée de la cycloïde (développée qui serait une autre cycloïde), étant obtenues au moyen des équations irrationnelles de cette courbe, sont irrationnelles elles-mêmes.

La cycloïde, considérée en elle-même et dans sa génération est, rationnellement, impossible.

On sait que cette courbe serait décrite par le mouvement d'un point M (fig. 40) situé sur la circonférence d'un cercle roulant sur une droite RC. On juge notamment que, dans ce mouvement supposé effectué de R en C, tous les points de l'arc RM venant successivement s'appliquer sur la droite RA, jusqu'à ce que M, à son tour, s'y applique en A, l'arc RM est égal à la droite RA.

Prenons sur l'arc RM un point Q aussi rapproché qu'on voudra du point de contact R, le point Q est nécessairement à une certaine distance de RC, tant que le cercle ne touche cette droite qu'au point R. Le point Q mettra un certain temps, un instant, si court qu'il soit, pour venir en Q′ toucher RC. En même temps, pour que ce mouvement de Q puisse s'effectuer, le point R de l'arc RM devra cesser de toucher RC, et s'élever au-dessus de cette droite à un point R′. Il y aura donc un certain temps, un moment où le cercle ne sera nulle part en contact avec la droite; ce qui est contraire à l'hypothèse de la cycloïde, qui implique que le cercle générateur ne cesse pas de toucher en un point la droite sur laquelle il roule.

D'ailleurs, les points de l'arc RM, qui s'appliqueraient successivement sur RA seraient distants les uns des autres. Ce seraient des points mathématiques, et l'on ne peut pas concevoir l'arc, une ligne quelconque comme formée de points mathématiques contigus les uns aux autres. On ne saurait donc, du contact successif de ces points distants entre eux avec la droite RA, conclure aucun rapport d'étendue, de longueur, entre l'arc RM et la droite RA. Sans doute, on peut rapprocher autant qu'on voudra, par la pensée, ces points mathématiques qui s'appliqueraient successivement à la droite RA ; mais enfin on ne peut supprimer toute distance entre eux, les concevoir comme continus. Ainsi, on le voit, l'égalité qu'on admet entre l'arc abaissé sur la droite et cette droite ne résulte point du cercle roulant sur la droite, si cette hypothèse est réduite à sa possibilité rationnelle au point de vue où je viens de me placer.

Je conçois néanmoins que, par l'effet de l'abaissement et de l'élévation simultanés sur RC, des points de l'arc RM, plus ou moins distants entre eux, ces points décrivent des courbes, et que le point M de l'arc RM, par une suite d'abaissements, arrive en A, après avoir décrit une courbe, ou plutôt une suite de petites courbes jointes entre elles, qui seraient des arcs de cercles, si l'on suppose que, dans ces mouvements, le cercle tourne sur quelque point fixe.

On peut aussi supposer qu'un polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés et ayant un de ses côtés en contact avec une droite, roule sur cette droite, en ce sens que, dans son mouvement, ses côtés s'abaissent et s'élèvent successivement sur la droite. Si, par exemple, un polygone régulier PABCD, etc. (fig. 41), étant d'abord en contact avec la droite LM, par son côté AB, son côté BC s'abaisse sur la droite en BC′, en même temps que son côté AB s'élèvera en BA′, et que son côté AP s'élèvera en A′P′, je conçois, de cette manière, une courbe CC′ décrite par l'abaissement de BC, et aussi des courbes AA′, PP′ décrites par l'élévation de AB et de AP ; et en considérant que tous les côtés du polygone changent à la fois de position, je vois qu'il peut en résulter un fort grand nombre d'arcs de courbes circulaires différentes, dont les unes seront séparées, et les autres jointes entre elles. Ces dernières, dans leur ensemble, pourront d'ailleurs, après un nombre suffisant d'abaissements et d'élévations, s'étendre depuis un angle quelconque du polygone, du point même le plus élevé de la hauteur du polygone, jusqu'à la droite sur laquelle on supposera placé un de ses côtés ; mais, les petites courbes qui seront ainsi réunies se trouveront différentes par leurs courbures mêmes, car elles seront décrites avec des rayons différents, et il est visible que l'on ne pourra appliquer à cet enchaînement, à ce système de courbes, les règles qu'on prétend être applicables à la cycloïde.

Cependant ici, on pourrait dire avec vérité, que telle partie de la droite parcourue, couverte par abaissement successif des côtés du polygone, est égale à la somme de ces côtés.

De plus, un cercle, un objet quelconque, ne peut avoir un mouvement de rotation. Supposons d'abord un cercle se mouvant sur lui-même en tournant sur son centre fixe : cette hypothèse implique que tous les points qu'on pourrait considérer sur un même rayon de ce cercle décriraient des circonférences différentes, auraient ainsi un mouvement différent; de sorte que, du centre à la circonférence et sur un même rayon, il n'y aurait pas deux points, pas un continu affectant un même mouvement; ce qui est inadmissible : tout mouvement implique une certaine étendue, si petite qu'elle soit, ayant un même mouvement. — Ceci montre que nul objet ne saurait se mouvoir sur lui-même, soit que cet objet tournât sur un point fixe, soit qu'il eût un mouvement de rotation et de translation. — Encore à ce point de vue, la génération de la cycloïde est impossible.

En résumé, la cycloïde est toute chimérique; elle est, sous tous les rapports, irrationnelle.

2° *La spirale logarithmique.* C'est une courbe polaire (fig. 42) telle que l'angle formé par le rayon vecteur avec la tangente est constant. L'équation de la spirale logarithmique est irrationnelle. On obtient cette équation, qui est $a \log u = t + constante$, en remplaçant sa sous-tangente AT par $\frac{u^2 dt}{du}$, expression qui est celle de la sous-tangente d'une courbe polaire, et qui est irrationnelle, ainsi que je l'ai fait observer plus haut. Dans $\frac{ud^2t}{du}$, u exprime une droite, le rayon vecteur, et t un arc, celui compris entre ce rayon et l'axe des x.

Il s'ensuit qu'il n'est pas rationnel d'admettre que la normale de cette courbe est égale à son rayon de courbure, et que sa développée est une autre spirale logarithmique.

Pour construire la spirale logarithmique, on s'est livré à des considérations qui ne sont pas satisfaisantes au point de vue rationnel; mais ces procédés suffisent pour la pratique.

La spirale logarithmique a paru jouir de propriétés merveilleuses. On a jugé qu'elle faisait un nombre infini de révolutions autour de son centre, et que néanmoins sa longueur totale était finie et même égale à une ligne droite facile à déterminer. On croit qu'il suffit pour cela de tirer la tangente indéterminée AS (fig. 43), d'élever au point C sur le rayon CA une perpendiculaire rencontrant cette tangente en S : on admet, en effet, que AS est la longueur de toute la spirale, comprise depuis le point A jusqu'au centre.

Montucla, dans son *Histoire des mathématiques*, dit à ce sujet :

« Les lecteurs peu géomètres seront sans doute « d'abord tentés de se révolter contre la géométrie, « et de regarder cette vérité comme un paradoxe « des plus incroyables. Comment, diront-ils, se « peut-il faire qu'une ligne qui n'a point de bornes « soit d'une longueur finie? Mais nous allons dis- « siper cette difficulté par une observation fort simple. « Si l'on tire un rayon CA, il coupera la courbe dans « une infinité de points, comme A, *a*, *a*, et les « lignes CA, C*a*, C*a*, etc., à l'infini, seront en « progression continue : les circonférences des cer- « cles décrits de ces rayons seront donc aussi en « progression géométrique ; d'où il suit que, quoique « leur nombre soit infini, leur somme sera encore « finie ; mais il est facile d'apercevoir que chaque « portion de spirale comprise entre deux de ces cer- « cles concentriques, est semblable, et par consé- « quent qu'elle a un certain rapport déterminé avec « la circonférence du cercle qui la renferme. Toutes « ces portions de spirales formeront donc elles-mêmes « une progression géométrique décroissante. Après

« cette remarque, tout le merveilleux de la propriété « dont on parle s'évanouit. Il y a longtemps qu'on « ne s'étonne plus de ce qu'un nombre infini de « termes continûment proportionnels et décroissants « ne forment qu'une somme finie. »

Que d'erreurs à relever dans ces conceptions, dans ces spéculations irrationnelles !

1° Il n'est point exact de dire que la spirale logarithmique fait autour de son centre *une infinité de révolutions avant d'y arriver*. Si l'on suppose qu'elle fait une infinité de révolutions en se rapprochant de plus en plus du centre C, il faut admettre qu'elle n'atteint pas ce centre ; car, si elle y arrive, le nombre de révolutions qu'elle fait à partir du point A est limité, fini. Si on admet qu'elle fait une infinité de révolutions sans s'arrêter nulle part, sans atteindre le point C, il s'ensuivra que cette courbe n'aura pas de fin, ne sera pas finie, bien qu'elle soit contenue dans un espace limité. Si l'on ne veut pas l'appeler *infinie*, par cette considération qu'elle serait contenue dans un espace limité, qu'elle ferait partie d'une étendue finie, il faut du moins reconnaître que, en soi, elle n'a pas de terme, de point extrême opposé à A. Si elle n'a pas de fin, de point final, elle ne pourra pas être déterminée, être représentée comme on le fait, par une ligne finie AS, au moyen d'une tangente en A et d'une perpendiculaire élevée au point C sur le rayon CA.

2° Quant aux cercles concentriques qu'on supposerait décrits des rayons CA, C*a*, C*a*, etc., si l'on suppose leur nombre infini, la somme de leurs circonférences ne saurait être finie, alors même qu'elles seraient en progression géométrique décroissante : c'est une idée fausse que celle d'une somme finie formée d'un nombre infini de termes continûment proportionnels et décroissants. Je vois bien que la conséquence d'une si bizarre hypothèse est que cette somme n'atteindra pas telle quantité finie, ne s'élèvera pas, en tel cas, au double du plus grand terme de la progression ; mais pourtant elle-même ne sera pas finie, elle n'aura pas une fin, elle ne saurait être déterminée.

3° Au reste, j'attaque plus radicalement encore les propriétés qu'on attribue à cette courbe. Je soutiens qu'il n'est pas raisonnablement admissible que la courbe, depuis un point A quelconque, fasse une infinité de révolutions autour du point C, centre de la courbe, en s'en approchant de plus en plus. D'abord, sous aucun rapport, je l'ai dit, l'infini n'est possible, l'infini réalisé, effectué. Il est impossible qu'un nombre infini de révolutions soit effectué. Dans l'hypothèse, un nombre infini de révolutions diviserait en une quantité infinie de parties la ligne tirée de A en C, parties qui, à la vérité, devraient, dans ce cas, décroître continûment et proportionnellement de A en C. Or, une ligne quelconque ne saurait être actuellement, effectivement, divisée en une quantité infinie de parties, de quelque manière que ce fût.

4° Toutes les fois qu'une ligne finie est divisée, il faut que, à partir de chacune de ses extrémités, il y ait un *premier point de division*, comprenant entre lui et le point extrême une certaine étendue. Or, cette condition n'existerait pas dans l'hypothèse dont il s'agit, puisque la courbe faisant une infinité de révolutions et coupant ainsi une infinité de fois la ligne CA, de A en C, sans arriver en C, il n'y aurait pas un dernier point de division à partir de A, et conséquemment pas un premier point de division à partir de C, en revenant vers A. Ainsi, admettre que la somme d'une infinité de parties forme une étendue finie, une étendue comprise dans une étendue finie, alors même qu'on suppose ces parties décroissantes, c'est se jeter, encore au point de vue où je viens de me placer, dans une impossibilité rationnelle.

5° Je ne puis non plus accorder à Montucla que les parties de spirale comprises chacune entre deux des cercles concentriques qu'il décrit avec les rayons CA, C*a*, C*a*, etc., soient semblables en tant qu'il puisse y avoir certain rapport de quantité entre elles. Ces portions de spirales ont une courbure différente qui exclut la proportionnalité qu'on leur attribue. Les cercles concentriques eux-mêmes diffèrent essentiellement entre eux, et non point entre eux de rapport de quantité; ils ne sont donc point en proportion géométrique. Tous les cercles ont certaines propriété semblables. Ainsi, dans tout cercle, tous les points de la circonférence sont à égale distance du centre; mais les cercles de divers rayons ne sont pas d'égale courbure, et cela suffit pour qu'on ne puisse admettre entre ces cercles ou entre leurs circonférences des rapports de quantité : ils ne sont point semblables comme le sont des figures rectilignes ayant les angles égaux et les côtés proportionnels.

6° La prétendue détermination de la longueur de la courbe en question, étant fondée notamment sur cette hypothèse que la courbe, après une infinité de révolutions, *aboutit au centre* C, et cette hypothèse n'étant pas admissible, ainsi qu'on l'a vu, il faut rejeter cette détermination. D'ailleurs, il est bien impossible qu'une courbe égale une droite en longueur, ces grandeurs étant hétérogènes.

On voit maintenant que toutes ces propriétés merveilleuses dont on a gratifié cette courbe s'évanouissent. Conçue telle que la raison le permet, elle n'offre rien d'étonnant, pas d'anomalie; tout en elle est limité. On peut, il est vrai, par la pensée, rapprocher de plus en plus du centre C l'extrémité opposée à A, multiplier mentalement le nombre des révolutions effectuées vers le centre, autant qu'on le voudra et de plus en plus, sans qu'il y ait de borne possible au renouvellement de cette opération; mais la raison ne permet pas de pousser la multiplication jusqu'à l'infini. Il faut toujours s'arrêter à un nombre fini.

3° *La spirale d'Archimède.* On suppose cette courbe décrite par un point A (fig. 44) qui se meut uniformément le long du rayon AB pendant la révolution uniforme de ce rayon autour du centre A, de manière que lorsque le rayon a parcouru la circonférence entière, le point A se trouve confondu avec le point B.

Cette courbe, considérée en elle-même, est admissible, mais est-elle rationnelle dans l'équation par laquelle on l'exprime, c'est-à-dire par laquelle on prétend déterminer la valeur de l'ordonnée AM? Cette ordonnée étant représentée par u, l'arc BN par t, la circonférence entière BCDB par $2\pi a$, et AB par a, l'équation de la courbe est

$$u = \frac{t}{2\pi};$$

expression irrationnelle, dans sa généralité, car π

est ici la circonférence dont le diamètre est l'unité, et ainsi $\frac{t}{2\pi}$ exprime le rapport d'un arc t à deux circonférences pouvant être d'une courbure différente de celle de t, rapport irrationnel.

En exprimant la circonférence BCDB par π, au lieu de $2\pi a$, on aurait eu, $u : a :: t : \pi$, proportion qui donnerait l'équation $u = a.\frac{t}{\pi}$, où $a.\frac{t}{\pi}$ serait le rapport de l'arc t de la circonférence π à cette même circonférence, multipliée par le rayon a. Or, cette équation n'est pas irrationnelle. En effet, t et π étant des quantités homogènes entre elles, $\frac{t}{\pi}$ exprimerait un nombre abstrait; u égalerait le produit de a multiplié par ce nombre.

La spirale d'Archimède n'est pas rationnelle dans la manière dont on la suppose engendrée. En effet, l'hypothèse d'une ligne décrivant une circonférence en tournant sur un point fixe, en d'autres termes, d'une circonférence d crite par un rayon, est inadmissible. Cette hypothèse implique que tous les points qu'on pourrait considérer sur le rayon auraient un mouvement différent, puisqu'ils décriraient des circonférences différentes. Il n'y aurait pas un continu affectant un même mouvement, ce qui, je le répète, n'est pas admissible. Une ligne n'est pas composée de points, elle ne peut l'être que de lignes, et les lignes qui seraient regardées comme les éléments du rayon ne peuvent avoir toutes qu'un même mouvement tant qu'elles forment une seule droite. Une ligne ne saurait, rationnellement, se mouvoir que de deux manières, ou parallèlement à elle-même, ou dans le sens de sa longueur. La supposition d'une ligne se mouvant en tournant sur un point fixe est chimérique, inadmissible, théoriquement.

4° *La spirale parabolique.* Voici comment on conçoit la génération de cette courbe. On suppose que sur un rayon quelconque CN (fig. 45), on prend une partie NM moyenne proportionnelle entre l'arc AN et une ligne donnée p, et c'est la courbe qui passe par tous les points M ainsi déterminés, qui est la spirale parabolique. Si donc on représente AN par x, CM par y, et AC par a, on a pour l'équation de cette courbe

$$y = a - \sqrt{px}.$$

En y substituant $\pi + x$, $2\pi + x$; etc., à la place de x, on voit que cette courbe peut faire un nombre indéfini de révolutions autour du centre C, et que par conséquent elle est du nombre des spirales.

Point de rapport de quantité, point de moyenne proportionnelle entre une droite et un arc : cette courbe est donc irrationnelle, et en elle-même et dans son équation.

5° *La spirale hyperbolique.* On suppose que du point C (fig. 46), pris pour centre sur l'indéfinie CP, sont décrits des arcs AG, QM, PO, etc., égaux en longueur, et que, par leurs extrémités G, M, O, etc., il passe une courbe CKGMO. Cette courbe est une spirale hyperbolique.

Si, de plus, on élève une droite BR, parallèle à l'axe CP, et qui en soit éloignée d'une quantité CB = AG = QM = PO, etc., cette droite sera l'asymptote de la spirale hyperbolique.

La supposition d'arcs égaux en longueur, bien que de courbures différentes, n'est point rationnelle, car il n'est point de rapport de quantité entre des courbes essentiellement différentes : la raison rejette donc cette spirale.

L'on a dit :

« Soit le rayon CA $= a$, AN $= x$, CM $= y$, « AG = QM, etc., $= b$, on aura $x : b :: a : y$; « d'où $xy \doteq ab$, équation semblable à celle de l'hy- « perbole entre les asymptotes. » — Cette équation, qui est celle de la spirale hyperbolique, n'est point rationnelle, puisqu'on y établit un rapport de quantité entre un arc et des droites et entre des courbes différentes.

Appelant π la circonférence dont le diamètre est a, et substituant à x les valeurs $\pi + x$, $2\pi + x$,... $m\pi + x$, on obtient successivement $y = \frac{ab}{\pi + x}$, $y = \frac{ab}{2\pi + x}$, $y = \frac{ab}{m\pi + x}$. On en a conclu que *plus l'abscisse est grande, plus l'ordonnée est petite, et que celle-ci ne devient nulle que lorsque* m *est infini; qu'ainsi la spirale hyperbolique fait une infinité de révolutions autour de son centre avant d'y arriver.*

Ces dernières conditions sont impossibles : *m* ne peut devenir infini. L'infiniment petit d'ailleurs n'est pas, mathématiquement, exprimé par $\frac{A}{\infty}$, comme on le suppose ici. L'ordonnée y ne peut donc jamais devenir nulle. En supposant que la spirale hyperbolique pût faire une infinité de révolutions autour de son centre (ce qui ne se peut), cette courbe ne saurait arriver au centre C; car une circonférence ou partie de circonférence n'aboutit pas à son centre, et l'on suppose que chaque point de la spirale en question doit être sur quelque circonférence décrite du centre C. La spirale peut se rapprocher de plus en plus, indéfiniment, de son centre, mais sans jamais l'atteindre. Il y a d'ailleurs contradiction à supposer que la spirale fait, à partir d'un point, une infinité de révolutions autour d'un autre point, et que cependant elle arrive à ce dernier point.

6° *La quadratrice.* Si une droite AG, tangente en A (fig. 47), se meut uniformément et parallèlement à elle-même le long du diamètre Aa, et si au même instant qu'elle part du point A, le rayon AC tourne uniformément autour du centre C vers le point E, de manière qu'il se confonde avec CE au moment où la droite AG s'y confondra aussi, on aura, par l'intersection continuelle de ces deux lignes, une courbe AMD qu'on appelle *quadratrice de Dinostrate.*

Cette courbe est admissible, rationnelle, envisagée en elle-même, et à part le mode de génération qu'on lui attribue; mais elle est irrationnelle dans sa génération, qui implique le mouvement d'un rayon autour de son centre.

Maintenant, elle est rationnelle, admissible dans son équation, qui est

$$(1) \quad y = \frac{a - x}{a} \operatorname{tang} \frac{cx}{a},$$

quand A est l'origine des abscisses?

Dans cette équation, AP$=x$, PM $=y$, AC $=a$, l'arc ABE $= 90° = c$, et l'arc AB ou $u = \frac{cx}{a}$.

L'on obtient l'équation arc AB ou $u = \frac{cx}{a}$, en posant la proportion $a : x :: c : u$. Or, de cette proportion qui, à la vérité, est rationnelle, en ce sens qu'une droite peut être contenue dans une autre autant qu'une courbe l'est dans une courbe de même courbure, l'on ne pourrait pas conclure que $u = \frac{cx}{a}$, en ce sens que l'arc u serait égal à l'arc c rectifié, multiplié par la droite x et divisé par la droite a, c'est-à-dire par les quantités numériques de ces droites. Alors, en effet, on mettrait en rapport des quantités hétérogènes.

$\frac{cx}{a}$ ne peut donner que la quantité curviligne de l'arc u, non point sa grandeur en ligne droite. Cette expression est rationnellement déduite de la proportion $a : x :: c : u$, en regardant comme abstraites les quantités qui y figurent. — D'ailleurs, sans même considérer comme abstraites les quantités qui entrent dans $\frac{cx}{a}$, je vois que cette expression est rationnelle. En effet, $\frac{cx}{a}$ revient à $c \times \frac{x}{a}$. Or, x et a étant homogènes, $\frac{x}{a}$ exprime un rapport réel, un nombre, une quantité abstraite qui, en ce cas, multiplie la courbe c. L'équation $u = \frac{cx}{a}$ est donc rationnelle, à ce point de vue encore.

Tang $\frac{cx}{a}$ représentant, dans l'équation de la quadratrice, une quantité rectiligne, et cette quantité étant multipliée par le nombre que représente la partie $\frac{a-x}{a}$, on a une expression rationnelle, admissible de la droite y.

En mettant l'origine des abscisses au centre C, et faisant $CP = x$, on obtient, pour la quadratrice, l'équation $y = \frac{x}{a} \operatorname{tang}\left(c - \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$, équation rationnelle comme la précédente.

Mais, développant en série $\frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$, et supposant ensuite $x = o$, dans ce développement, on en a tiré, pour y (devenue la base CD de la quadratrice), l'expression $\frac{a^2}{c}$, et l'on en a conclu que si cette base était connue, on aurait aussitôt la quadrature du cercle.

Or, tout cela est inadmissible.

La série dont il s'agit a été obtenue irrationnellement : il est facile de le reconnaître, d'après les principes que j'ai exposés.

Cette série ne peut donner exactement la valeur de y, quelle que soit la valeur de x, et quel que soit le nombre de termes que l'on y considère.

L'hypothèse de $x = o$ réduit l'équation $y = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$ à $y = o$. En donnant, dans la même hypothèse, $y = \frac{a^2}{c}$, la série se trouve en opposition avec l'équation dont elle est supposée être le développement.

L'équation y ou $CD = \frac{a^2}{c}$ (1) est impossible, car les quantités a et c n'étant pas homogènes, $\frac{a^2}{c}$ ne saurait être un rapport réel, une quantité mathématique.

Sachant que y ou la base $CD = \frac{a^2}{c}$, on aurait $c = \frac{a^2}{CD}$, et c est le quart de la circonférence; mais quand même on pourrait déterminer mathématiquement la base CD, on ne saurait avoir ainsi la quadrature du cercle, car l'équation $c = \frac{a^2}{CD}$ est irrationnelle en soi et elle est irrationnellement obtenue. — D'ailleurs, cette quadrature est une chimère.

1. On est encore arrivé à cette équation par un autre procédé évidemment irrationnel.

« Si, dit-on, on décrit du centre C et du rayon « CD le quart de cercle DLK, sa longueur sera « égale au rayon CA; car $\frac{aa}{c}$: DLK :: a : c; donc DLK = a. » — D'après l'équation $\frac{aa}{c}$ = CD, cette proportion revient à CD : DLK :: a : c; or, CD est le rayon de l'arc DLK comme a est le rayon de c, mais il faut rejeter la proportion mathématique, car il n'y a pas de rapport de quantité entre des courbes et des droites, entre les rayons et les circonférences, entre des circonférences de rayons inégaux.

On a dit encore : « PC = l'arc LD; car $\frac{aa}{c}$: a :: KL : u; d'où l'on tire KL = x = AP, et PC = LD. » — Même observation à faire : on suppose un rapport de quantité qui est impossible.

Ce que j'ai dit, dans ce chapitre et dans les précédents, suffira pour faire reconnaître les erreurs, les fausses spéculations qui ont échappé à ma critique.

Toutes les irrationalités que j'ai signalées, toutes celles qui pourraient exister dans la science, devront être soigneusement écartées de la théorie. Mais, dans la pratique, on peut n'en pas tenir compte, la pratique n'ayant en vue que d'obtenir des résultats prompts, suffisamment approximatifs.

Que l'on cesse de s'attacher, théoriquement, à des démonstrations impossibles comme leurs objets mêmes; que, par exemple, on ne veuille pas démontrer que la différentielle de sin x est $dx \cos x$; que celle de l'arc x est $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$; mais qu'on se permette de supposer vraies ces expressions, en se fondant sur ce qu'on peut le faire sans qu'il en résulte des erreurs sensibles, appréciables dans le calcul. On ne tentera pas de prouver que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité; que la différentielle d'un arc est égale à celle de sa corde; mais on dira que l'on peut admettre et que l'on admet en effet ces égalités sans commettre une erreur importante pour les résultats pratiques. Ces égalités étant supposées, on les fera figurer dans les opérations, pour trouver d'autres expressions, irrationnelles aussi, mais qui suffiront encore aux besoins de la pratique.

Quant aux quadratures des surfaces curvilignes, aux aires ou cubatures des surfaces courbes ou des solides de révolutions, on les calculera comme on le fait, mais en reconnaissant l'illégitimité théorique des procédés, qu'on n'appliquera qu'en vue d'obtenir des approximations suffisantes.

Si l'on émet quelque loi qui implique des rapports de quantité impossibles, on ne l'émettra qu'en vue de la pratique.

CHAPITRE XII

DES MATHÉMATIQUES MIXTES.

Les sciences comprises sous le nom de mathématiques mixtes me paraissent, en général, logiquement déduites des données ou principes sur lesquels on les a édifiées; mais parmi ces données ou principes, il en est qui blessent la raison; il en est qui ne sont point des axiomes rationnels, mais seulement des *lois* conclues de l'expérience, et l'expérience, je l'ai dit, même en admettant qu'elle fût certaine, réellement acquise, n'autoriserait pas, rationnellement, à proclamer ces lois. Il y a donc cette différence entre les mathématiques pures et les mathématiques mixtes, que celles-ci ne sont pas complétement rationnelles, qu'elles n'offrent pas la rigueur, la certitude des premières.

Parmi les lois admises par les sciences mixtes, il en est que la raison ne peut accepter : telle est cette loi de la gravitation, d'après laquelle *l'espace total parcouru par le corps qui tombe est proportionnel au carré du temps écoulé depuis l'instant de son départ.*

En effet, toute partie de la durée et de l'espace, si petite qu'elle soit, est divisible, peut être considérée comme comprenant plusieurs parties plus petites; or, la loi que je viens de rappeler doit s'appliquer à toutes les parties de la durée et de l'espace, quelle que soit leur petitesse : il faut donc qu'un corps qui tombe ait une vitesse continûment accélérée; car il ne doit pas y avoir une partie quelconque du temps, une partie quelconque de l'espace, où il ait une même vitesse. C'est, en effet, ce que l'on admet généralement : on conçoit des points mathématiques, des éléments indivisibles, infiniment petits, dans la durée et dans l'espace, et l'on suppose que la vitesse du mouvement d'un corps qui tombe s'accroît à chacun de ces points; mais la raison condamne une telle doctrine. J'ai déjà donné des explications à cet égard, en parlant de la méthode des fluxions; un mouvement ne saurait être continûment accéléré; la loi de gravitation que j'ai citée est donc essentiellement irrationnelle.

L'astronomie et la mécanique qui supposent cette loi sont donc irrationnelles en ce point, et il serait convenable que, dans les livres qui émettent cette même loi, son irrationalité fût reconnue, expliquée; ce qui n'empêcherait pas de l'admettre dans la pratique.

Dans ces sciences, il faut rejeter, théoriquement, les spéculations qui ont pour objet la mesure de lignes courbes, d'aires, de surfaces curvilignes et de surfaces courbes, de solides à surfaces courbes; mesure qui suppose des rapports de quantité que la raison n'admet pas.

On voit, par suite, qu'il faut rejeter, au point de vue rationnel, cette loi de Képler : « Les arcs « que les planètes et satellites décrivent en parcou- « rant leurs orbites sont toujours tels, que les aires « sont proportionnelles aux temps, et qu'ils parcou- « rent ainsi des surfaces égales dans des temps « égaux. » Si l'on continue à poser cette loi, on n'y attachera plus l'idée d'une exactitude rationnelle, d'une valeur absolue, mais seulement d'une valeur d'approximation suffisante.

Rationnellement, un mouvement ne peut être composé de plusieurs mouvements : un mouvement est, par sa nature même, indivisible : on n'a point toujours respecté ce principe.

Lagrange, par exemple, appliquant sa théorie des fonctions analytiques à la mécanique, et considérant les équations $x = at$, et $x = bt^2$, qui expriment, la première, un mouvement uniforme, et la seconde, un mouvement uniformément accéléré, conclut que *tout mouvement $x = ft$ peut, dans un instant quelconque, au bout du temps t, être regardé comme composé d'un mouvement uni-*

forme dû à une vitesse imprimée au mobile, mesurée par $f't$, et d'un mouvement uniformément accéléré dû à une force accélératrice agissant sur le mobile et proportionnelle à $\frac{1}{2}f''t$, ou simplement à $f''t$.

Ce sont là des fictions irrationnelles. J'ai déjà fait observer, en parlant du traité des fluxions, par Maclaurin, que l'on ne peut supposer un mouvement, une vitesse à un point indivisible du temps et de l'espace; et quand même cela serait admissible, le mouvement supposé ne serait pas composé, ne pourrait être, rationnellement, envisagé comme la réunion de plusieurs mouvements. De telles hypothèses blessent la raison et ne peuvent s'accepter qu'au point de vue des opérations pratiques.

En mécanique et en astronomie, on considère le mouvement curviligne comme la résultante de plusieurs forces diverses.

« Tout mouvement curviligne, dit M. Biot, exige « au moins la combinaison de deux forces agissant « simultanément suivant des directions diverses ; et « en variant, d'une manière convenable, la direc« tion et le mode d'action de ces forces, on peut « faire décrire à un point matériel toutes sortes de « courbes quelconques, avec telle espèce de vitesse

« que l'on voudra. Parmi cette diversité infinie de « mouvements, il en est un qui mérite une considé- « ration particulière. C'est celui dans lequel une des « deux forces est constamment dirigée vers un cen- « tre fixe, l'autre étant une simple impulsion instan- « tanée. Ce cas est celui des corps célestes, et il « offre en outre des résultats applicables dans une « infinité d'expériences. »

La raison est froissée par cette doctrine. Des forces ne sauraient varier continûment dans leur direction ; elles ne sauraient changer de direction que d'instant en instant, et, à ce point de vue, la ligne décrite par un objet, par un point matériel sur lequel agiraient des forces suivant des directions différentes et variables, ne serait pas une courbe ; elle ne pourrait être qu'une ligne brisée.

D'un autre côté, pourtant, il est des hypothèses où les forces devraient être supposées varier continûment dans leurs directions : tel est le cas dont parle M. Biot.

Que faire dans ce conflit? Il faut reconnaître l'irrationalité de ces hypothèses et ne les admettre que *pratiquement*. Ainsi, on supposera une force attractive et une force d'impulsion en ligne droite, agissant simultanément et continûment, déterminant ainsi un mouvement curviligne ; mais on reconnaîtra que tout cela est rationnellement impossible.

Pourquoi, d'ailleurs, assurer qu'il faut nécessairement deux forces pour opérer le mouvement curviligne? Un mouvement curviligne n'est pas plus composé qu'un mouvement rectiligne. La ligne courbe n'est pas un composé de lignes droites. Il est commode, utile, pratiquement, de considérer le mouvement curviligne comme le résultat de l'action combinée de deux forces agissant suivant différentes directions rectilignes : eh bien! que la pratique continue à faire cette supposition, mais que la théorie reconnaisse qu'elle est irrationnelle.

J'ai précédemment montré l'impossibilité de mouvements curvilignes; j'ai montré qu'un corps ne saurait tourner sur lui-même, décrire une courbe quelconque. Sous ce point de vue encore, l'astronomie et la mécanique, qui admettent de tels mouvements, sont irrationnelles, et cette irrationalité devra être reconnue par la théorie.

Dira-t-on qu'en mécanique on attribue le mouvement à des points mathématiques, et que de tels points supposés en mouvement échappent à l'impossibilité qui m'a fait rejeter le mouvement curviligne?

Je répondrais que l'on ne peut, rationnellement, concevoir un point en mouvement qu'en attribuant ce point à un corps. Si je suppose qu'un corps se meut, je puis, par abstraction, concevoir le sommet d'un angle de ce corps comme un point mathématique en mouvement; mais l'hypothèse d'un point mathématique isolé de tout corps et se mouvant isolément est inadmissible, est irrationnel.

Les mathématiques mixtes contiennent encore d'autres irrégularités ou irrationalités qu'il sera facile de reconnaître, d'après les principes que j'ai posés.

Toutefois, je crois devoir parler, avec quelque détail, de celles qu'offre la statique.

La statique s'est égarée, notamment dans la détermination du centre de gravité : je vais signaler les principales irrationalités commises dans cette partie de la science.

Diverses théories ont été présentées. Toutes pèchent essentiellement sous quelque rapport au point de vue rationnel.

Wallis appliqua particulièrement à ce sujet la géométrie des indivisibles et son arithmétique des infinis que j'ai critiquées et rejetées. Il considéra un très-petit arc comme une ligne droite.

Pascal s'appuya sur des calculs ingénieux, tels que ceux relatifs à la *somme triangulaire*, à la *somme pyramidale;* mais sa théorie est entachée d'impossibilités, de fausses doctrines analogues à celles de Wallis.

Je ne puis résumer et juger ici en particulier tous les traités qui se sont occupés de la détermination mathématique du centre de gravité : je m'attacherai à deux théories, celle de M. Poinsot, et celle de M. Poisson. Le jugement que je porterai sur celles-ci pourra plus ou moins s'appliquer aux autres dans leurs points essentiels.

« Lorsqu'on peut considérer, dit M. Poinsot, le « corps ou le système comme composé de parties « dont on connaît en particulier le centre de gra- « vité, et les poids respectifs, il est très-facile de « déterminer le centre de gravité de ce corps ou « système.

« Car ce centre n'étant autre chose que le point « d'application de la résultante générale des forces « de la pesanteur appliquées à toutes les molécules, « on peut concevoir que, pour le déterminer, on a « d'abord cherché les points respectifs où sont ap- « pliquées les résultantes partielles des forces qui « agissent sur chaque corps, et qu'ensuite on a « cherché le point d'application de la résultante gé- « nérale de ces diverses résultantes.

« Donc, si l'on connaît déjà les centres de gravité « respectifs des différents corps, l'on n'aura qu'à « supposer appliquées à ces points des forces pa-

« rallèles, et respectivement égales aux poids de ces « corps, et l'on trouvera le centre de gravité du sys« tème absolument de la même manière que l'on « trouverait le centre de ces forces parallèles. »

L'auteur conclut que, dans ce cas, l'on pourra employer ou la composition successive des forces, ou la théorie des moments.

« A la vérité, dit-il, plus bas, comme on peut « toujours regarder un corps comme un assemblage « de *points matériels qui sont eux-mêmes leurs pro« pres centres de gravité*, il s'ensuit qu'on peut leur « appliquer la méthode précédente, et qu'on aura « généralement la distance du centre de gravité « d'un corps quelconque à un plan, en prenant la « somme des moments de toutes les particules de ce « corps, par rapport au plan, et divisant par la « somme de ces particules, ou, ce qui est la même « chose, en divisant par la masse totale du corps. « Mais la solution générale de cette question dépend « du calcul intégral.

« Comme il existe des considérations élémen« taires très-élégantes qui conduisent à la détermi« nation des centres de gravité pour la plupart des « corps dont il est question dans la géométrie, nous « nous bornerons à cette recherche qui ne s'écarte « pas des éléments. »

L'auteur pose ensuite ce lemme : *Toute figure* *dans laquelle il se trouve un point tel, qu'un plan quelconque mené par ce point, coupe la figure en deux parties parfaitement symétriques, a son centre de gravité en ce point*, que l'on nomme ordinairement le centre de figure.

« En effet, dit-il, si l'on fait passer un plan quel« conque par le centre de la figure, comme ce plan « la coupe en deux parties parfaitèment symétriques, « il n'y a pas de raison pour que le centre de gravité, « qui est un point unique, et dont la position ne dé« pend pas de la figure, se trouve d'un côté de ce plan « plutôt que de l'autre; donc, il sera dans ce plan. « Le centre de gravité, devant donc se trouver à la « fois dans tous les plans que l'on pourrait conduire « par le centre de figure, sera en ce point même qui « est la commune intersection de tous ces plans. »

L'auteur en conclut : 1° que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur; 2° que celui de l'aire d'un parallélogramme quelconque est à l'intersection de ses deux diagonales, ou au milieu de l'une d'elles; que celui de la solidité d'un parallélipipède est à l'intersection de ses quatre diagonales ou au milieu de l'une d'elles.

Pour trouver le centre de gravité du *contour* d'un polygone quelconque ou d'un assemblage de droites disposées comme on voudra dans l'espace, on regardera chaque droite comme concentrée en son centre de gravité, lequel est au milieu de sa longueur, et l'on n'aura plus ainsi à considérer qu'un assemblage de points représentés, pour leurs poids respectifs, par les longueurs des lignes dont ils sont les centres de gravité. On trouvera donc le centre de gravité du système par la composition successive de ces poids, ou par la théorie des moments.

L'auteur, passant à la détermination du centre de gravité d'un polygone quelconque, observe que tous les polygones peuvent se décomposer en triangles, et que si l'on a les centres de gravité de tous les triangles composant un système proposé, on n'aura plus à considérer qu'un assemblage de points donnés de position et dont les poids respectifs seront représentés par les aires des triangles dont ils seront les centres de gravité, et il sera facile de résoudre le problème. Or, voici comment il procède pour trouver le centre de gravité d'un triangle.

« Soit ABC (fig. 48) le triangle proposé : con-« sidérons sa surface comme composée d'une infinité « de tranches parallèles à la base BC. Il est visible « que la ligne droite AD menée du sommet A au « milieu D de la base, divisera toutes ces tranches « en deux parties égales. Leurs centres de gravité « respectifs seront donc tous sur la droite AD, et « par conséquent celui de leur système, c'est-à-dire « celui du triangle, y sera aussi.

« Par un raisonnement tout à fait semblable, on « ferait voir que le centre de gravité du triangle « doit aussi se trouver sur la ligne BE qui serait « menée du sommet de l'angle B au milieu E du « côté opposé AC.

« Le centre de gravité devant donc se trouver à « la fois sur les deux lignes AD, BE, sera néces- « sairement à leur intersection G.

« Mais si l'on joint DE, puisque les points D et E « sont les milieux respectifs des côtés CB, CA, la « droite DE sera parallèle à AB et en sera la moi- « tié. Or, si DE est moitié de AB, à cause des « triangles semblables DGE, AGB, le côté DG sera « aussi moitié de son homologue AG.

« Donc, DG sera le tiers de AD; et AG en sera « des deux tiers.

« Donc, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle quelconque est situé sur une ligne menée de l'un quelconque de trois angles au milieu de la base opposée, et se trouve au tiers de cette ligne, à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet de l'angle.*

M. Poinsot présente à ce sujet une autre démonstration; la voici :

« Par le milieu D (fig. 49) de la base BC du « triangle ABC, menez aux deux autres côtés les « parallèles DE, DF, qui les rencontrent en E et F: « le triangle proposé sera décomposé en un parallé-

« logramme AEDF, et deux triangles DEC, DFB, « parfaitement égaux entre eux, et semblables au « premier.

« Le moment du triangle ABC par rapport à une « ligne quelconque menée dans son plan, sera donc « égal à la somme des moments du parallélogramme « et des deux triangles.

« Soit a l'aire de l'un de ces triangles, $4a$ sera « celle du triangle proposé. Donc si l'on nomme x « la distance du centre de gravité de ce triangle à « la base BC, on aura $4ax$ pour son moment par « rapport à cette ligne.

« Soit h la hauteur du triangle; $\frac{h}{2}$ sera la dis- « tance du centre de gravité du parallélogramme à « la base, et comme son aire est $2a$, son moment « sera $2a \times \frac{h}{2}$, c'est-à-dire ah.

« Ensuite les deux triangles BFD, DEC ont visi- « blement leurs centres de gravité à même distance « de la base BC; donc, si l'on nomme x' cette dis- « tance, la somme de leurs moments sera $2ax'$.

« On aura donc $4ax = ah + 2ax'$, ou bien, en « divisant par $4a$:

$$x = \frac{1}{4} . h + \frac{x'}{2}$$

« Si l'on supposait, avec Archimède, que, dans

« les triangles semblables, les centres de gravité « sont des points semblablement placés; alors « comme les dimensions du triangle BFD ou DEC « sont moitié de celles du triangle ABC, on aurait « $x' = \frac{x}{2}$ et substituant dans l'équation précédente, « on trouverait

$$x = \frac{h}{3}.$$

« Ce qui ferait voir que le centre de gravité d'un « triangle se trouve placé au-dessus de chaque côté « à une distance égale au tiers de la hauteur de « l'angle opposé; et que, par conséquent, il est au « point déterminé ci-dessus.

« Mais on peut parvenir à cette conclusion sans « aucune hypothèse; car puisque l'on a trouvé pour « le triangle ABC,

$$x = \frac{1}{4} h + \frac{x'}{2},$$

« x étant la distance de son centre de gravité à la « base BC, et x' la distance du centre de gravité « du triangle BFD à sa base BD; en imaginant « que l'on fasse dans le triangle BFD, la même « construction que l'on a faite dans le triangle ABC, « si l'on nomme x'' la distance analogue à celle « qu'on a nommée x', et si l'on observe que la

« hauteur du nouveau triangle est deux fois plus
« petite que celle du premier, on aura :

$$x' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{2}$$

« Et, continuant la même construction, on trou-
« vera :

$$x'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4} + \frac{x'''}{2}$$

$$x''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{8} + \frac{x^{\text{IV}}}{2}, \text{ etc., etc.}$$

« x''', x^{IV}, etc., désignant les distances des centres
« de gravité à la base dans les triangles successifs,
« distances qui diminuent sans cesse, et dont la
« dernière peut être rendue moindre que toute
« grandeur donnée, puisqu'elle est toujours plus
« petite que la hauteur du triangle dans lequel on
« la considère.

« On aura donc, en substituant successivement
« dans la première équation à la place de x', x'',
« x''', etc., leurs valeurs :

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4 \cdot 4} + \frac{h}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \text{etc., à l'infini,}$$

« d'où $x = \frac{h}{3}$, ce qu'il fallait démontrer. »

L'auteur prétend trouver le centre de gravité de la solidité d'un polyèdre quelconque, et en général d'un assemblage de polyèdres disposés comme on voudra dans l'espace. Il considère que tous les polyèdres peuvent se décomposer en pyramides triangulaires, et il croit obtenir le centre de gravité de la pyramide par le procédé suivant :

« Soit ABCD (fig. 50) une pyramide triangulaire « quelconque. Si nous considérons cette pyramide « comme composée d'une infinité de tranches parallèles à la base BCD, il est visible qu'une droite « menée de l'angle A en un point quelconque de la « base, couperait toutes ces tranches et la base elle-« même en des points semblablement placés. Donc, « si cette droite est menée au centre de gravité I de « la base, elle passera par tous les centres de gra-« vité des tranches parallèles. Le centre de gravité « du système de ces tranches, et par conséquent « celui de la pyramide, devra donc se trouver sur « la droite AI.

« Mais par un raisonnement tout à fait semblable, « on voit que le centre de gravité de la pyramide « doit aussi se trouver sur la ligne CH qui serait « menée de l'angle C au centre de gravité H de la « face opposée. Donc, il sera nécessairement à l'in-« tersection G de ces deux droites.

« Ainsi les deux droites AI et CH doivent néces-

« sairement se rencontrer; et c'est ce que l'on voit « d'ailleurs indépendamment de la considération du « centre de gravité; car si l'on tire CI, cette droite « ira couper le côté BD en son milieu E, puisque « le point I est le centre de gravité du triangle « BCD; par la même raison, si l'on tire AH, cette « droite ira rencontrer BD au même point E, et par « conséquent les deux droites AI, CH seront dans « un même plan, qui est celui du triangle AEC, et « elles se couperont nécessairement.

« Actuellement, si l'on regarde que le point I est « au tiers de EC; et le point H au tiers de EA, il « est clair qu'en joignant IH, cette droite sera pa- « rallèle à AC et en sera le tiers. Mais si la droite « IH est le tiers de AC, à cause des triangles sem- « blables IGH, AGC, le côté IG sera le tiers de « son homologue GA; ou bien sera le quart de IA, « et AG en sera les trois quarts.

« Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est située sur une ligne menée de l'un quelconque des trois angles au centre de gravité de la base opposée; il est au quart de cette ligne, à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet de l'angle.* »

M. Poinsot ajoute, à ce sujet, une démonstration analogue à celle qu'il a donnée en second lieu pour le triangle. Il considère d'abord le prisme triangulaire, et arrive, par le même procédé, à conclure que le centre de gravité de ce prisme est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des deux bases.

L'auteur observe que si l'on considère un cylindre quelconque à bases parallèles comme un prisme dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, il résulte des solutions qu'il a présentées, que le centre de gravité de ce cylindre est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases; qu'en considérant le cône comme une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, le centre de gravité d'un cône à base quelconque est sur la ligne qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet du cône.

Ce système de M. Poinsot sur les centres de gravité est vicieux, irrationnel dans ses points capitaux.

1° Il n'est point exact de dire que l'on peut regarder un corps comme un assemblage de points matériels qui sont eux-mêmes leurs propres centres de gravité. De deux choses l'une, ou bien ce que l'auteur appelle *point matériel* est un point mathématique, ou bien c'est un point d'une étendue quelconque. Si le point matériel est un point mathématique, un corps ne peut être composé de tels éléments, comme le suppose l'auteur; si le point matériel a une étendue, quelque petite qu'elle soit, il ne peut être lui-même son propre centre de gravité : on ne peut donc pas alors appliquer aux points matériels les règles applicables aux centres de gravité, et le calcul intégral ne saurait donner ici une solution rationnelle.

J'accorde que, par les considérations qu'invoque l'auteur, on peut rationnellement déterminer le centre de gravité de toute figure dans laquelle il se trouve un point tel, qu'un plan quelconque mené par ce point, coupe la figure en deux parties parfaitement symétriques; j'accorde que toute figure de ce genre a rationellement son centre de gravité en ce point; mais c'est seulement pour ces cas que l'auteur présente une détermination mathématique du centre de gravité d'une surface ou d'un volume. Toutes ses autres spéculations sur les centres de gravité des polygones et des polyèdres sont inacceptables.

Il suppose, en effet, pour le centre de gravité du triangle, que sa surface est composée d'une infinité de tranches parallèles à la base, qui, dit-il, auront chacune leur centre de gravité sur la droite menée du sommet au milieu de la base. Il se fonde sur ce principe qu'il a établi, comme je l'ai dit plus haut, que *le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur.* Mais alors les bandes dont il conçoit ici que le triangle est composé, ne sont donc que des lignes mathématiques, des lignes sans largeur : hypothèse inadmissible ; une surface ne saurait être formée de telles lignes parallèlement unies entre elles.

L'autre argumentation qu'il présente pour démontrer la même proposition est aussi défectueuse. Elle se fonde sur cette proposition que le moment du triangle par rapport à une ligne quelconque menée dans son plan est égal à la somme des moments du parallélogramme et des deux triangles composants. Dans ce système, le triangle devrait être un ensemble de points mathématiques auxquels on supposerait appliqués des poids égaux ; or un triangle n'est point un ensemble de points mathématiques.

Dans cette même démonstration, il invoque la sommation d'une progression décroissante infinie, sommation impossible, et qui ne saurait donner, fût-elle possible, le résultat que lui attribue l'auteur.

Sa première démonstration relative au centre de gravité de la pyramide blesse la raison, en ce qu'il y suppose la pyramide composée d'une infinité de tranches ou surfaces parallèles à la base ; ce que la raison n'admet point. Il y fait d'ailleurs intervenir le centre de gravité du triangle qu'il n'a point rationnellement déterminé, ainsi que je viens de le montrer. Quant à sa démonstration analogue à celle donnée pour le triangle, il faut la rejeter comme celle-ci ; par les mêmes raisons, on ne peut théoriquement accepter sa démonstration relative au centre de gravité du prisme triangulaire.

Il n'est point exact de regarder un cylindre et un cône comme un prisme et une pyramide dont les bases seraient des polygones d'une infinité de côtés.

Je vais maintenant porter mon attention sur la théorie de M. Poisson.

« Tous les corps, dit-il, sont des assemblages de « points matériels liés entre eux de différentes ma- « nières. En premier lieu, nous considérerons ces « points matériels isolément et sous le seul rapport « qu'ils servent de point d'application aux forces; « ensuite nous les réunirons pour former des corps « solides, fluides ou simplement flexibles, et nous « chercherons les conditions d'équilibre, ou les lois « du mouvement pour chaque espèce de corps. »

Dans l'intention de l'auteur, qu'est-ce qu'un point matériel? est-ce un point indivisible, mathématique? Si oui, alors un corps ne peut être un assemblage de points matériels. Si l'auteur entend de petites molécules matérielles divisibles, quel sera alors dans ces molécules le point d'application des forces?

M. Poisson, sous un rapport, raisonne continuellement comme si le point matériel était un point mathématique; mais alors des points matériels ne peuvent, par leur réunion, constituer un corps, et ici la théorie est défectueuse.

Après avoir montré que, dans le cas de deux forces dirigées dans un même plan et appliquées aux extrémités d'une droite inflexible, de manière à ce que leurs directions prolongées se coupent en un point K, les deux composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point quelconque de la résultante; et que la résultante et l'une des composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point quelconque de l'autre composante; l'auteur, jugeant que ce théorème a lieu, quelque petit que soit l'angle des deux composantes, conclut qu'il subsiste encore à la limite, où l'angle devient nul et où les forces deviennent parallèles. Par suite de cette assimilation, il assure : 1° que la résultante de deux forces parallèles, agissant dans le même sens, partage la distance mutuelle des composantes en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces; 2° que cette résultante est parallèle aux composantes; 3° qu'elle est égale à leur somme.

Mais l'assimilation qu'il se permet ici n'est pas légitime : la raison n'autorise pas à la conclure de cette considération de limite qui est invoquée. Il y a une différence essentielle, radicale, entre les deux hypothèses qui sont ici assimilées.

Il est vrai que M. Poisson présente ensuite une démonstration satisfaisante de la proposition dont il s'agit.

L'auteur se pose ce problème : un corps étant partagé en un nombre quelconque de parties dont les centres de gravité sont connus, trouver celui du corps entier; et il trouve, pour la solution, ces formules :

$$\begin{aligned} Px_{,} &= px + p'x' + p''x'' + \text{etc.}, \\ Py_{,} &= py + p'y' + p''y'' + \text{etc.}, \\ Pz_{,} &= pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

Où p, p', p'' expriment les poids des diverses parties du corps;

x, y, z, les coordonnées du centre de gravité du poids p;

x', y', z', les coordonnées de celui du poids p', etc. ;

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité du corps entier, et P son poids ou la somme des poids

p, p', p'', etc., en faisant attention que P est la résultante des forces p, p', p'', etc.

Et, pour le cas où le corps considéré est homogène, les poids P, p, p', p'', etc., étant simplement proportionnels aux volumes, et ceux-ci étant désignés par V, v, v', v'', etc., les formules ci-dessus deviennent les suivantes :

$$\begin{aligned} Vx_{,} &= vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.}, \\ Vy_{,} &= vy + v'y' + v''y'' + \text{etc.}, \\ Vz_{,} &= vz + v'z' + v''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Ces conclusions et ces formules sont justes, exactes, dans l'hypothèse ; mais l'auteur ajoute :

« Ces formules ont lieu, quelque soit le nombre « de parties dans lequel on a divisé la valeur V; elles « subsisteront donc encore si l'on suppose que ce « nombre devient infini, et qu'en même temps les « portions v, v', v'', etc., de ce volume deviennent « infiniment petites ; par conséquent on peut tou- « jours dire que *le volume entier d'un corps mul- « tiplié par la distance de son centre de gravité à « un plan quelconque, est égal à la somme de tous « les éléments infiniment petits de ce même volume, « multipliés respectivement par leurs distances à ce « plan.* »

« A proprement parler, poursuit l'auteur, cette « somme d'un nombre infini de quantités infiniment

« petites n'est qu'une *limite* dont on peut appro-
« cher d'aussi près qu'on veut, en augmentant le
« nombre de ces quantités. Ainsi, par exemple, que
« l'on partage le volume donné en un très-grand
« nombre de portions très-petites, v, v' v'', etc.,
« qu'on multiplie ensuite chaque portion par la dis-
« tance d'un de ses points au plan des x, y, et que
« ce point soit pris au hasard dans l'étendue de
« cette portion de volume : la somme de tous les
« produits ne sera pas la valeur exacte de $Vz_{,}$, car
« il faudrait, pour cela, que le point pris dans cha-
« que volume partiel fût le centre de gravité de
« cette partie du corps; mais comme ces deux
« points différeront de moins en moins à mesure
« que la portion de volume à laquelle ils appar-
« tiennent deviendra plus petite, on conçoit que la
« somme des produits approchera aussi de plus en
« plus de la valeur de $Vz_{,}$; de telle sorte que cette
« valeur peut être regardée comme sa limite dans
« le sens du décroissement des volumes v, v',
« v'', etc. Il ne s'agira donc que de trouver, dans
« chaque cas particulier, l'expression de cette li-
« mite, qui s'obtiendra par les règles du calcul
« intégral. . . . . »

Ceci pèche au point de vue rationnel qui ne permet pas de supposer qu'un corps, qu'un volume est composé d'une infinité de parties infiniment petites, et que l'on parvient par l'intégration à la sommation de ces chimériques entités. Il faut, théoriquement, écarter cette spéculation, qui ne saurait satisfaire la raison, quels que fussent les cas auxquels elle serait appliquée.

Pour première application, l'auteur cherche le centre de gravité d'une ligne à double courbure donnée par ses deux équations; il partage la longueur de la courbe en une infinité d'éléments infiniment petits, et prenant pour la longueur de l'élément qui répond aux coordonnées quelconques x, y, z, la formule $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, il conclut que le produit de cet élément par sa distance au plan des x, y, est $z \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, en sorte qu'on aura, en intégrant, l étant la longueur de la courbe et z la distance de son centre de gravité au plan des x, y,

$$lz_{,} = \mathrm{S}z \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

Et on aura de même, par rapport au plan des x, z, et des y, z,

$$ly_{,} = \mathrm{S}y \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$
$$lx_{,} = \mathrm{S}z \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

$x_{,}$ et $y_{,}$ représentant les ordonnées du centre de gravité, parallèles aux axes des x et des y.

Or, ces calculs pèchent non-seulement en ce qu'on y suppose une ligne divisée en une infinité de parties, dont on prétend obtenir la sommation, mais encore en ce qu'on prend, pour l'élément de la courbe considérée, l'expression $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, illégalement obtenue. Cette expression est la différentielle d'une droite rapportée à trois axes rectangulaires. Le calcul différentiel, justement appliqué, donne cette différentielle, mais il n'autorise pas à la prendre pour différentielle d'une courbe, d'une ligne à double courbure. A cet égard, je me réfère à ce que j'ai dit de l'expression $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, que l'on considère à tort comme la différentielle d'un arc de courbe plane.

L'auteur, pour seconde application, détermine le centre de gravité d'une ligne droite, puis celui du contour d'un polygone. Cette partie ne peut non plus être rationnellement acceptée, bien que le résultat obtenu soit ici conforme à la vérité.

Cherchant le centre de gravité d'une courbe plane, l'auteur commet des infractions analogues, et arrive à cette conclusiôn que la distance du centre de gravité d'un arc de cercle au centre de ce cercle est quatrième proportionuelle au rayon, à la corde et à l'arc : chose impossible, car il n'y a point de proportion entre des quantités hétérogènes, entre une droite et une courbe.

Il se livre à des irrationalités du même genre dans ses spéculations relatives à la détermination du centre de gravité de l'arc de cycloïde.

Il cherche ensuite le centre de gravité de l'aire comprise entre deux courbes tracées dans un même plan, et cette spéculation doit être pareillement rejetée. Il y divise l'aire en question en une infinité d'éléments par des perpendiculaires élevées sur l'axe des x, séparées par des intervalles infiniment petits, et considère chacun de ces éléments comme un parallélogramme. Or, tout cela est contraire à la possibilité, à la raison.

Sa détermination du centre de gravité du triangle, obtenue par le même procédé, doit être condamnée par les mêmes considérations : il divise le triangle en une infinité d'éléments qu'il regarde, contrairement à la vérité, comme des parallélogrammes.

L'auteur présente une autre manière de trouver le centre de gravité d'un triangle. Il raisonne ainsi :

« Après avoir mené la ligne CF (fig. 51) qui « joint le sommet C et le milieu de la base AB, cou« pons cette droite par une suite de parallèles à « AB, telles que ll', mm', nn'; par les points m et « m', où la droite mm' rencontre les côtés CA et CB « du triangle, menons des droites lmn et $l'm'n'$, pa« rallèles à CF, et exécutons la même construction

« pour toutes les droites semblables à *mm'* : nous « formerons par là deux suites de parallélogrammes, « tels que *lmm'l'* et *mnn'm'* qui seront, pour ainsi « dire, inscrits et circonscrits au triangle. Or, la « ligne CF coupe toutes les parallèles à la base AB, « comme la base elle-même, c'est-à-dire en deux « parties égales; donc elle partage tous ces parallé- « logrammes en deux parties parfaitement égales, « et par conséquent leurs centres de gravité se « trouvent tous sur cette droite; donc aussi le cen- « tre de gravité de la somme des parallélogrammes « inscrits et celui de la somme des parallélogrammes « circonscrits sont deux points de cette même droite. « Mais à mesure que l'on multipliera le nombre des « parallèles à la base, ou qu'on diminuera leurs dis- « tances, ces deux sommes diffèreront de moins en « moins entre elles et avec le triangle CAB qui est « leur limite, comme le cercle est la limite des po- « lygones inscrits et des polygones circonscrits; « leurs centres de gravité approcheront donc conti- « nuellement, et d'aussi près qu'on voudra, de se « confondre avec celui du triangle; et comme ces « centres ne cesseront pas d'appartenir à la droite « CF, il en faut conclure que celui du triangle est « aussi un des points de cette droite.

« Par le même raisonnement, on prouvera que « ce point doit aussi se trouver sur la droite AK qui

« joint le sommet A et le milieu du côté opposé BC ; « donc le centre de gravité du triangle ABC est « placé à l'intersection G des deux droites CF et AK, « F et K étant les milieux des côtés AB et CB. Mais « si l'on mène la droite FK, cette droite sera paral- « lèle à AC, puisqu'elle coupe les deux côtés AB et « BC en parties égales ; les triangles CGA et KGF « seront donc semblables, ainsi que les triangles « FKB et ACB, et l'on aura

$$FG : CG :: FK : AC :: FB : AB ;$$

« donc FG sera moitié de CG, comme FB est moi- « tié de AB : par conséquent CG sera les deux tiers « de la ligne entière CF ; ce qu'il s'agissait de dé- « montrer. »

J'accepte ce raisonnement. J'admets que le centre de gravité du triangle se trouve ainsi rationnellement déterminé.

L'auteur observe, avec raison, qu'on trouvera le centre de gravité d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles et en faisant usage des formules ci-dessus reproduites, dans lesquelles on substituera les aires des triangles aux volumes v, v', v'', etc., et l'aire entière du polygone au volume V.

On peut, ainsi que le dit M. Poisson, par un procédé analogue, déterminer le centre de gravité d'une pyramide triangulaire. Il ajoute que ce résultat étant démontré pour une pyramide triangulaire, il est aisé de l'étendre à une pyramide quelconque. En effet, quelle que soit la base d'une pyramide, on peut toujours la partager en un certain nombre de triangles, et décomposer la pyramide donnée en autant de pyramides triangulaires qui auront pour bases ces différents triangles et le même sommet. Le problème sera donc réduit à trouver le centre de gravité d'un volume, alors qu'on connaît les centres de gravité de toutes les parties qui le composent.

Pour déterminer le centre de gravité d'un segment de cercle, l'auteur commet des irrationalités analogues à celles que j'ai remarquées dans ses démonstrations du centre de gravité d'autres courbes.

Il faut de même rejeter sa détermination du centre de gravité du secteur, qu'il conclut des centres de gravité du segment et du triangle formé par les deux rayons comprenant l'angle du secteur et la corde de l'arc du secteur.

L'autre procédé qu'il présente pour trouver le centre de gravité du secteur est vicieux au même point de vue, et de plus en ce qu'il divise le secteur en une infinité de secteurs infiniment petits qu'il prend pour des triangles.

Il tombe encore dans des irrationalités du genre de celles que j'ai déjà indiquées, lorsqu'il veut déterminer les centres de gravité d'une aire *Cpm* terminée par un arc de cycloïde, des solides et surfaces de révolution, et des polyèdres en général.

Je le répète, toutes les théories qu'on a présentées sur les centres de gravité sont défectueuses en quelque point essentiel.

Quoi qu'il en soit, l'on peut déterminer et l'on a déterminé rationnellement les centres de gravité, 1° des figures offrant un point tel qu'un plan quelconque mené par ce point coupe la figure en deux parties parfaitement symétriques; 2° des contours des polygones rectilignes, des surfaces ou systèmes de surfaces planes rectilignes, des polyèdres ou solides à surfaces planes rectilignes; mais on n'a point déterminé et l'on ne saurait déterminer mathématiquement, rationnellement, les centres de gravité des lignes courbes, surfaces courbes, et solides à surfaces courbes qui ne rentrent pas dans la première catégorie, celle relative à une division symétrique. Tout ce qu'on a imaginé ou pourrait imaginer pour trouver scientifiquement les centres de gravité des autres figures courbes, ne devra être regardé que comme des procédés irrationnels, bien que suffisants pour la pratique.

Ce n'est pas seulement en cette partie que la statique s'est livrée à des spéculations irrationnelles.

Elle s'y est livrée dans la théorie des *vitesses virtuelles*, notamment en y supposant un mouvement infiniment petit communiqué à un système de points, et en y appliquant le calcul infinitésimal, lequel est vicieux théoriquement.

La dynamique aussi a payé tribut à l'erreur : je pourrais signaler dans toutes les théories plus ou moins d'irrationalités semblables ou analogues à celles que j'ai montrées dans la statique de M. Poinsot ou dans celle de M. Poisson.

Il est une sorte de spéculation que l'on a appelée *calcul des probabilités*, et qui doit être rangée dans la classe des mathématiques mixtes.

Le calcul des probabilités repose sur ce principe, sur cette donnée, qu'un événement, un fait, peut arriver ou ne pas arriver; qu'il y a plus ou moins de possibilités pour que ce fait se produise que pour qu'il ne se produise pas.

Cette donnée est-elle fondée sur la réalité? Non, car la raison affirme que tout ce qui est, tout ce qui se produit est *nécessaire*, *fatal*. Ces possibilités que nous concevons viennent de notre ignorance des causes véritables : les effets réels, quels qu'ils soient, nous paraîtraient inévitables, nécessaires, si nous pouvions vraiment connaître leurs causes; alors, du moins, nous ne saurions considérer des effets comme seulement possibles.

Mais, de même qu'on suppose l'étendue dans la géométrie, le temps et le mouvement dans la mécanique et l'astronomie, quoique l'étendue, la durée et le mouvement soient impossibles rationnellement, de même on peut baser des calculs sur l'hypothèse du *possible*, du plus ou moins de *possibilités* qui nous semblent exister, et admettre *hypothétiquement* cette partie des mathématiques qu'on appelle *calcul des probabilités.*

Les probabilités se mesurent, se calculent en raison des possibilités qu'on suppose à la production d'un fait, d'un événement, et des possibilités contraires. Si, par exemple, on suppose, on admet trois causes pouvant, l'une ou l'autre, également produire tel effet, et une seule pouvant l'empêcher, alors la probabilité sera exprimée par $3 - 1 = 2$.

Si je suppose cent causes pour une possibilité et dix causes contre cette possibilité, la probabilité sera exprimée par $100 - 10 = 90$.

On sait que le savant Laplace a présenté une théorie sur cette matière; qu'avant lui, Fermat, Pascal et plusieurs autres mathématiciens célèbres y avaient porté leurs investigations.

Dans ma doctrine philosophique, le monde physique n'existe pas, il n'y a aucun phénomène extérieur, le temps même n'a pas de réalité : il ne peut y avoir que des êtres purement spirituels et sans durée, sans changement réel; mais bien que sans durée, le sentiment unique d'un être peut comprendre une succession infinie d'objets; de même le sentiment d'un être peut ne comprendre que les objets d'un instant, ou de deux instants, ou de tel autre nombre limité d'instants, quel que soit ce nombre. (Voir mon *Système philosophique.*)

Ceci posé, on y trouve les données d'un calcul des probalités.

En effet, on voit une possibilité pour que le sentiment ne comprenne que les objets d'un instant actuel; une possibilité pour qu'il comprenne, outre ces objets d'un instant actuel, des objets d'un instant suivant; une possibilité pour qu'il embrasse des objets d'un instant actuel, plus ceux de deux instants suivants, et ainsi de suite, à l'infini; de sorte que, contre une possibilité, pour le sentiment, de ne comprendre que les objets d'un instant présent, il y a une infinité de possibilités différentes : il est donc *infiniment* probable que le sentiment d'un être n'est pas borné aux objets d'un moment actuel; car on a $\infty - 1 = \infty$.

Et comme, à quelque nombre d'instants que les objets du sentiment s'élèvent, ils pourront encore s'élever à un nombre d'instants de plus en plus grand, indéfiniment, il s'ensuit qu'il y a, pour le sentiment, une infinité de possibilités contraires à la possibilité de s'élever seulement à tel nombre fini quelconque d'instants; et, en exprimant ce nombre fini par a, on a, pour l'expression relative à ces possibilités,

$$\infty - a = \infty .$$

D'après cela, la perpétuité, la continuité infinie des instants du sentiment est infiniment probable. On peut donc dire que le calcul des probalités, dans ma doctrine philosophique, est on ne peut plus favorable à l'hypothèse de l'immortalité de l'âme.

Le calcul qui précède, il est vrai, repose sur l'hypothèse d'une *infinité* de possibilités, de chances, *actuellement existante*, hypothèse irrationnelle, d'après ce que j'ai dit de l'infini; mais ici le calcul des probabilités implique cette infinité de chances. Au surplus, je le répète, les probabilités n'ont aucune valeur rationnelle : tout sentiment réel est nécessaire en tout point; il résulte uniquement, directement et nécessairement de la substance une et indivisible de l'âme. Si des êtres diffèrent dans leurs sentiments, c'est que les substances de ces êtres sont essentiellement différentes.

CHAPITRE XIII

EXAMEN CRITIQUE D'UN ÉCRIT INTITULÉ : « RÉFORME DE LA GÉOMÉTRIE », PAR M. BAILLY. — APERÇU CRITIQUE DE SA « THÉORIE DE LA RAISON HUMAINE. »

Il est radicalement impossible, suivant l'auteur, de traiter la moindre question d'une manière convenable, sans la considérer comme se rattachant à un *tout* philosophique qui la contient et qui peut seul en fournir la solution. Ce tout qu'il faut au préalable avoir saisi dans ses différentes parties, est l'ensemble de toutes les idées de l'esprit humain; idées qu'il faut expliquer dans leur formation, dans leur développement, par une théorie qui les renferme toutes et qui les présente comme s'enchaînant dans une harmonie parfaite. Celui qui procède autrement *ne sait, absolument parlant, ce qu'il fait, ni ce qu'il dit.* Il ignore forcément la signification réelle de la plupart des mots dont il se sert. Quiconque voudra se faire écouter devra commencer par donner sa philosophie, sans quoi on ne prendra pas la peine inutile de l'entendre.

M. Bailly prêche d'exemple, il a préludé par l'émission de la *Théorie de la raison humaine*, où il a, dit-il, exposé les lois de l'entendement humain dans la production de toute science. Il peut donc fermement étudier dans tous leurs détails les différentes sciences particulières, afin de voir si elles sont construites *en conformité de la chose à laquelle elles doivent leur existence;* et, dans le cas contraire, *montrer quelle est leur véritable nature*, et *dans quel sens* la réforme doit être opérée.

Or, l'auteur s'occupe d'abord de la géométrie et va l'étudier *d'une manière fondamentale*.

La géométrie étant, comme l'a dit l'auteur, *une science particulière de l'ordre transcendental, ses propositions ont une valeur générale absolue*. Sa matière est renfermée dans le *distinct*[1] de la *forme, qui nous est grossièrement donné par les objets extérieurs, puis rectifié par l'activité intellectuelle qui laisse dans la conscience les produits qu'elle a obtenus dans ce travail. Ces produits sont des formes régulières et idéales qui sont la base véritable de la géométrie. Il n'y a dans la conscience empirique ni triangle parfait, ni cercle parfait, ni sphère exacte. Ce qui aura été dit théoriquement à propos de ces formes, ne pourra avoir d'application que par rapport à des formes irrégulières, puisqu'il n'y en a que de telles dans la nature... La science transcendantale est donc en dehors des objets... Les formes,*

1. Sous cette expression générale, l'auteur entend *qualité, propriété, partie, prédicat, mode*, etc.

quelles qu'elles soient, sont déterminées par des lignes qui en sont les distincts. La géométrie a donc pour objet des lignes et des angles.

L'auteur assure que *l'on peut aborder cette étude sans s'escorter de tout cet attirail de définitions, de principes et d'axiomes dont les géomètres ont l'habitude de la faire précéder, et qui ne peut avoir d'autre effet que d'entraver l'esprit dans ses premiers pas.* Il s'agit d'*augmenter la somme de nos connaissances, de saisir des distincts :* pourquoi alors commencer par amortir nos facultés en les faisant fonctionner dans le vide?—*Les principes et les axiomes, dont on fait tant de bruit et qu'on regarde comme les pivots de la géométrie, ne lui sont d'aucun secours.* Ces propositions *représentent des distincts, des lignes, des angles et des figures* comme toutes les autres propositions, et *pas autre chose.* Elles ne sont ni antérieures ni supérieures à aucune de celles dont se compose la géométrie; ensemble, elles forment un tout de même nature, mais *il n'en est pas une seule qui puisse être posée comme base fondamentale d'une autre.* Énonçons-les donc successivement sans faire des bigarrures dans notre exposition.

A l'appui de cette réforme, l'auteur allègue la *fâcheuse influence* qu'ont *ces propositions préliminaires sur l'esprit des commençants;* cette influence, c'est *le doute, l'hésitation, le découragement.*

Il paraît à M. Bailly que les géomètres ne s'inquiètent guère du sens précis qu'on doit attacher à ces expressions : *définition*, *principe*, *axiome*, *démonstration*, *preuve*, *explication*, qu'ils prodiguent. Une démonstration n'est ni une preuve, ni une explication : quelle est donc la différence qui la distingue? Qu'est-ce qu'une démonstration? Qu'est-ce qu'une explication? Qu'est-ce qu'une preuve? Il faut de toute nécessité répondre à ces questions. Quand on a dit, par exemple, qu'un axiome est une proposition évidente par elle-même, on doit montrer en quoi consiste l'évidence et quels en sont les caractères. — C'est précisément parce que *la chose a été impossible*, que *la plus grande confusion s'est établie dans la partie théorique de la géométrie*, et que l'on se trouve très-embarrassé de voir si telle ou telle proposition doit être démontrée. Or, toutes les difficultés disparaissent si l'on remonte à la source que l'auteur a signalée.

L'auteur a fait voir, dit-il dans l'ouvrage cité, qu'une explication est une *énumération de distincts*, qu'une démonstration a pour but une *appréciation de rapports*, et qu'une preuve n'est pas autre chose qu'un *parcours de construction*, qu'un *retour de l'activité sur une construction qu'elle a faite*. Par conséquent, lorsque ces mots ne rappellent pas ces idées, ils n'ont aucun sens. La *démonstration* est l'expression dont on abuse le plus. On parle souvent de démontrer, où il n'y a nullement sujet à démonstration. Pourquoi, par exemple, prétendre démontrer que lorsque deux triangles ont deux côtés égaux, et que l'angle compris entre les deux côtés du premier est plus grand que l'angle compris entre les deux côtés du second, le côté opposé au plus grand angle est plus grand que le côté opposé au plus petit angle? Il est clair qu'il ne s'agit ici ni d'apprécier un rapport entre deux termes, ni d'énumérer et de faire saisir les différents termes d'une construction; il ne peut donc être question ni de démonstration, ni de preuve; il y a tout bonnement un *distinct à saisir, c'est-à-dire une explication à donner, un fait à constater*.

Afin de bien saisir l'esprit et la valeur de la doctrine de M. Bailly, j'ai lu sa *Théorie de la raison humaine*, dont plusieurs parties m'ont paru peu intelligibles. Je n'ai pas le loisir de la reproduire ici dans toutes ses phases, mais je crois devoir en présenter quelques aperçus, qui montrent la manière dont l'auteur procède pour arriver aux conclusions que je viens de rapporter.

Suivant M. Bailly, les axiomes de la géométrie ne sont qu'une répétition de ce qu'elle comprend dans ses notions. « Ainsi, dit-il, une ligne étant con-« sidérée dans sa nature même comme une suite de

« *points*, il n'y a pas grand effort à faire pour voir « que deux points peuvent être sur une ligne, et « servent à la déterminer, si elle est droite... Les « axiomes ne font qu'énoncer ce qu'il y a de con- « tenu dans les notions... Je ne puis connaître un « objet quelconque autrement que par une relation « entre cet objet. »

Au moyen de l'activité, selon l'auteur, l'on conçoit une série d'objets de même forme, de plus en plus petits, ou de plus en plus grands; on a ainsi, suivant les expressions de l'auteur, un *cône d'idées*.

« Envisagé séparément, le cône de l'idée a des distincts; tout cône est engendré par un triangle, et toute section d'un cône suivant l'axe donne un triangle, dont l'angle du sommet est double de celui du triangle générateur. Le cône de l'idée n'est pas déterminé : l'angle de la section seul l'est, et ses côtés peuvent être prolongés indéfiniment. L'idée de cet angle, dont l'ouverture est déterminée et par conséquent peut être plus ou moins grande, ne peut elle-même être soumise à la loi de progression : elle n'est pas donnée par l'expérience, ni prise dans le cône d'une autre idée.

« Comment les jugements synthétiques sont-ils possibles? Comment, par exemple, arrive-t-on à ce jugement : tout triangle rectiligne quelconque renferme deux angles droits? Cette proposition, répond M. Bailly, n'est possible qu'avec une loi progressive. Un triangle donné au moi est immédiatement assujetti à l'action de l'effort qui donne la construction de l'idée; les propriétés que renfermait le premier terme se retrouvent à tous ceux que vous examinez aux différents degrés. La conscience alors autorise l'emploi du mot *tout*, qui doit évidemment son existence à une progression produite par le mouvement d'une idée...

« On observe une action; cette action est immédiatement décomposée et force le moi à un acte qui est appelé la *cause*. Dans les différents mouvements d'un animal, la *cause* s'appelle l'*instinct;* dans l'homme, c'est l'âme. L'âme, comme on le voit, est une idée de soustraction, de décomposition, d'extraction, obtenue par l'effet d'un distinct. Ce distinct est quelque chose pour la conscience qui a été forcée à un acte de séparation. Comme tous les actes ont une valeur générale à l'instant même de leur apparition, et cela par l'effet de la loi progressive, on a eu ceci : tout effet a une cause, tout mouvement a un moteur, tout instinct, tout moteur appartiennent à un être; comme tout triangle a trois angles, tout objet a une forme. *Tout effet a une cause* est une proposition d'une conviction profonde; *elle existe à la fois pour la conscience pure dans le jeu de ses propres lois*, et pour la conscience empirique. *Le tout est plus grand que la partie, est absolument dans le même cas;* le cône étant construit, la conscience avertit immédiatement que l'addition suppose des termes réunis et que leur somme diffère, par l'excédant, de chacune des parties ou de la somme de plusieurs parties.... »

« La forme d'un corps a ses distincts qui sont les angles, les lignes, les surfaces. Ces données sont prises dans la conscience pure...; la conscience qui a saisi la succession indéfinie fournit la matière de l'énonciation d'une loi générale. Tout ce qui peut se dire d'une idée, appartenant à la conscience pure et examinée à des dimensions quelconques, se dira à tous les autres termes de sa progression...

« La proposition affirmant quelque chose d'un arbre ne peut acquérir une valeur générale qu'autant que son idée est un distinct commun à tous les arbres. Encore le *tout*, dans ces propositions, n'a qu'une valeur inscrite (saisie par l'entendement) et n'a pas de rapport avec le *tout* des propositions pures qui est à chaque terme de la progression. La valeur générale empirique n'est pas non plus la même que la valeur générale pure...

« Pour qu'il y ait démonstration, il faut l'existence de plusieurs termes, il faut une construction.

Les termes d'une construction ne diffèrent que du plus au moins dans leurs distincts. La loi de toute démonstration est par le fait invariablement fixée. On peut démontrer d'une chose qu'elle est plus grande ou plus petite ou égale à une autre, voilà tout. Il n'y a rien hors de là. Ainsi, dire, par exemple, qu'on va démontrer l'existence de Dieu, c'est seulement faire voir qu'on ne connaît pas soi-même les termes de la question, c'est joindre l'ignorance au charlatanisme. »

L'auteur suppose qu'il s'agisse, par exemple, de démontrer cette proposition : *les trois angles d'un triangle rectangle font deux droits.* « Comment, « dit-il, le moi fait-il partager à différentes con- « sciences la certitude de ce résultat, en imprimant « à leurs activités une direction que la conscience « connaissant a suivie elle-même pour arriver à « cette découverte. Un terme est déterminé ; c'est « deux droits : il ne reste plus qu'à faire la somme « des trois angles et à voir si elle est identique avec « deux droits. En menant une parallèle à un côté « du triangle par le sommet opposé, on obtient « trois angles à un même point, qui sont égaux aux « trois angles du triangle. Comme ils sont situés « d'un même côté d'une ligne droite, et à un même « point, ils forment deux droits... »

« On appelle du nom de preuve l'opération à

« laquelle on a recours pour régulariser l'explica-
« tion et la démonstration. Vous avez, je suppose,
« fait l'énumération des distincts d'une plante : la
« *preuve* que vous avez épuisé l'idée aura pour
« point d'appui le plus ferme le contact de l'objet
« avec les organes ou la conscience empirique. L'i-
« dée extraite, le *vrai* ressortira de la coïncidence
« des distincts énumérés avec ceux contenus dans
« l'objet ; le *faux* existera dans le cas de non-coïn-
« cidence. Lorsque l'*explication* sera une *définition*,
« la preuve ne pourra avoir lieu que lorsqu'on aura
« connaissance de la chose définie.

« La démonstration porte sa preuve en elle-même ;
« la certitude ressort de la nature des lois du moi ;
« on ne peut, en pareil cas, qu'en appeler à elles
« seules... »

Au sujet de la nécessité, l'auteur s'exprime ainsi :
« Si vous supposez un triangle, il contiendra néces-
« sairement trois angles : si vous supposez une rose,
« il s'ensuivra forcément l'existence d'un certain
« nombre de pétales, d'étamines, etc. ; si vous sup-
« posez un oiseau, vous aurez infailliblement des
« ailes, des plumes, des pattes, un animal d'une
« certaine grosseur. On voit assez que la *nécessité*
« ressort, comme la *généralité*, de l'existence de la
« progressivité. Toute accumulation de distincts,
« toute construction d'un nombre quelconque de

« termes, peuvent être des unités et considérées « comme telles. Ces unités ont été données ou obte- « nues par un effort déterminé de l'activité. Elles « sont rangées sous un certain nom qui les tient en « évidence. Lorsque vous considérez ce nom, ces « produits en quantité quelconque, vous trouvez « tout ce qu'ils contiennent; et l'esprit, en voie « soustractive, pour l'obtention des distincts et des « termes, se trouve contraint à parcourir la voie « qu'il a parcourue pour la composition des totaux. « Voilà l'exposition de la loi d'après laquelle s'en- « gendre la *nécessité*.

« Il n'y a rien de nécessaire dans une somme « quelconque que les distincts et les termes que l'ac- « tivité y a placés. L'activité, pour produire la *néces- « sité*, est assujétie à une marche; sa route, dans ce « cas, est déterminée. Pour avoir la loi générale, elle « se développe d'une certaine manière qu'elle doit « parcourir de nouveau, pour qu'il y ait nécessité...

« Les lois de l'*évidence* ont pour base l'expression « de tous les actes qui ont lieu par le jeu de l'acti- « vité pour l'élévation d'une construction; elles res- « sortent de la progressivité qui les rend possibles, « et qui, en se formant, donne des produits à l'*évi- « dence*. Tout ce qui est conforme à la nature de la « progressivité en marche régulière appartient à « l'*évidence*. »

L'auteur proscrit le syllogisme, il lui refuse toute valeur. Dans celui-ci, par exemple :

Tous les hommes sont mortels;
Or, Jacques est un homme;
Donc Jacques est mortel.

« Que représente cette proposition : Tous les « hommes sont mortels? Une construction et pas « autre chose. Quel est le terme construit? C'est « l'homme. L'expression *mortel* représente un dis- « tinct que l'on retrouve et que l'on doit retrouver à « tous les termes. Lorsque vous avez la construction, « vous avez par là même connaissance de tous les « distincts qui la forment et qui doivent se rencon- « trer à chacun des termes. Prenez celui que bon « vous semblera, et vous y trouverez tous les dis- « tincts de la construction. Ceux qui se sont imagi- « nés que le *syllogisme* pouvait servir à découvrir « la vérité, se sont grossièrement trompés... Bacon « a exercé une influence très-heureuse, en rame- « nant les choses à l'expérience, comme il le dit, ou « mieux, en insistant pour que l'activité s'occupe « de faire des constructions... La construction faite, « toute la connaissance y est comprise; le *syllogisme* « ne fait que la regarder et dire : La voilà; mais il « ne saurait absolument rien y ajouter. La construc- « tion est la totalité de la connaissance donnée par

« les facultés additives et soustractives qui seules « l'engendrent... »

« Inutile de prouver avec Aristote que toutes les « formes du raisonnement se ramènent au syllo- « gisme. Cela est évident pour nous qui n'avons « trouvé que des constructions dans l'entendement « humain..... »

L'auteur s'élève énergiquement contre la dialectique. « Elle trouve, dit-il, par dessus tout la vie « dans la confusion des sciences ; elle n'a jamais « donné autre chose que des erreurs et des illu- « sions..... C'est la dialectique qui protège le crime, « qui fait briller l'ignorance..... C'est à son abri que « l'homme devient orgueilleux, hypocrite, fripon ; « c'est par elle qu'il se console dans la dégradation, « se repose dans l'ordure..... »

Mais l'auteur croit avoir porté à la dialectique le coup de mort. « Le monstre aux cent formes di- « verses, dit-il, ne reparaîtra jamais ; il n'en restera « que le souvenir. Honte à quiconque lui adresse- « rait des adieux de regrets : je défie le genre hu- « main de la faire revivre..... »

Le lecteur a déjà reconnu l'analogie qui existe entre la doctrine de M. Bailly et la *Géométrie sans axiomes* de M. Thompson. C'est, au fond, le même système. C'est toujours l'esprit de révolte contre la raison, du moins contre l'évidence de raison, contre les principes ou axiomes rationnels. Comme le géomètre anglais, M. Bailly leur substitue des *faits*, ce qu'il appelle des *distincts :* ce sont les lignes, les angles, les formes. Toutes les propositions qu'on décore du titre de définitions, d'axiomes ou de principes, ne sont que cela : il faut se borner à les énoncer. L'*énonciation* ou l'*énumération* de M. Bailly répond à la *nomenclature* de la *Géométrie sans axiomes* de M. Thompson.

D'abord, vidons la question des définitions. M. Bailly veut bien qu'on *commence par faire l'énumération des faits géométriques, par les distinguer soigneusement les uns des autres, en leur donnant des noms particuliers. Cette analyse est nécessaire pour mettre en évidence la matière même de la science.* Il ne veut pas de définitions. Pour moi, je ne saisis pas bien la différence. Passons aux exemples et cherchons-y le mot de l'énigme. Voici comment l'auteur énumère :

« On appelle *ligne* ce qui sert à indiquer une di-
« rection. Lorsque la direction représentée est le
« plus court chemin d'un point à un autre, la ligne
« est dite *droite ;* on dirait *ligne brisée* dans le cas
« contraire, si toutefois il y avait plusieurs lignes
« *droites* reliées entre elles. Mais si la *ligne* autre
« que la droite n'était pas la somme de plusieurs
« lignes *droites*, elle serait appelée *ligne courbe.* »

Je conviens que ces propositions, quel que soit le nom qu'on leur donne, ne sont pas de vraies définitions, en ce qu'elles ne font pas connaître, n'expriment pas les objets mêmes dont il s'agit.

Au reste, je le reconnais, il y a plus que des définitions dans l'énumération de M. Bailly : il y a des axiomes rationnels qui s'y glissent furtivement.

Ainsi, j'en vois un sous cette assertion : « Lors« que la direction représentée est le plus court che« min d'un point à un autre, la ligne est dite droite. » — Cela implique que la ligne *dite droite* est le plus court chemin d'un point à un autre ; or, cette qualité d'être le plus court chemin d'un point à un autre est d'évidence rationnelle ; ce n'est pas un *fait* identique à celui de ligne droite. L'idée de chemin le plus court n'est pas l'idée de ligne droite ; mais l'esprit voit que, de la constitution de la ligne droite, il doit s'en suivre qu'elle est le chemin le plus court.

J'ai déjà discuté ce point au sujet de la *Géométrie sans axiomes*, mais il est des choses qu'il est bon de répéter. Comme le géomètre anglais, M. Bailly confond l'idée de ligne droite avec celle de chemin le plus court, et il fait des confusions de ce genre quant aux axiomes ou principes en général.

Laissons M. Bailly continuer son énumération :

« Lorsque deux lignes *droites* se rencontrent sans « coïncider, elles laissent entre elles un écartement « qui est désigné sous le nom d'*angle* : cet *angle* « peut varier et être plus ou moins grand.

« Pour indiquer l'endroit où deux lignes se cou- « pent, ou bien encore le lieu d'une ligne quel- « conque, on dit *point*.

« Des lignes qui limitent une certaine étendue « déterminent ce qu'on appelle une *figure*. Dans le « cas où les lignes sont droites, elles se coupent « deux à deux, et une *figure* peut être formée par « un nombre quelconque de lignes droites qui en « sont les côtés : la somme de ces lignes est ce que « l'on appelle le *périmètre* de la *figure*. Aucune « figure de cette espèce ne peut avoir moins de trois « côtés : on l'appelle *triangle*. Celle qui en a quatre « s'appelle *quadrilatère*; celle qui en a cinq, *penta-* « *gone*, etc. »

Pour moi, je crois pouvoir regarder cette suite de propositions comme une suite de définitions bigarrées d'explications et même d'axiomes. Cette assertion, que nulle figure comprise uniquement par des lignes droites ne peut avoir moins de trois côtés, est certainement un axiome rationnel.

M. Bailly continue ainsi :

« Il est facile de voir qu'une *figure* quelconque

« peut toujours être décomposée en un certain nom-
« bre de triangles, et qu'il suffit d'étudier les pro-
« priétés du triangle pour connaître immédiatement
« celles d'une figure donnée.»

D'abord, une figure curviligne ne saurait être divisée exactement en triangles. La première assertion de M. Bailly est donc trop générale. Une figure purement rectiligne peut toujours être divisée comme le dit l'auteur, et cette assertion-là constitue un axiome rationnel. Ce qui en est l'objet n'est pas un fait qui se trouve dans une figure quelconque. Il n'entre pas dans l'idée d'une figure qu'elle peut être divisée en un certain nombre de triangles : c'est une possibilité que la raison affirme, conclut de l'idée de figure, il est vrai, mais que l'on ne trouve pas dans la figure, dans l'idée même de la figure.

« Supposons, poursuit M. Bailly, que deux lignes
« droites, AB et CB (fig. 52), se coupent en un
« point B : elles forment un angle que l'on désigne
« par ABC.....

« Si nous prolongeons CB jusqu'en H, nous au-
« rons une ligne droite CH, coupée en un de ses
« points B par une autre ligne AB; il en résultera
« deux angles, ABC et ABH, dont le premier est
« plus petit que le second. En supposant que le
« point A s'approche du point H, il est évident que
« l'angle ABC augmentera d'une certaine quantité,

« et que l'autre diminuera d'autant. Il y aura un « moment où ces deux angles seront égaux ; et ce « moment sera celui où le point A aura fait la moitié de sa course de C vers H. Si nous représentons « cette course par I, nous aurons deux angles « demis, lorsque le point A aura accompli la moitié « de son trajet. Lorsqu'il en aura parcouru le tiers, « nous dirons angle *tiers*, etc. »

Eh bien ! là encore, je vois des axiomes rationnels. En affirmant que, si des lignes droites se coupent en un point, elles forment des angles en ce point, l'auteur énonce une vérité évidente par elle-même, un axiome : ce n'est pas seulement une proposition identique, car l'idée de lignes qui se coupent n'est pas l'idée des angles qu'elles forment; ce n'est pas non plus une simple définition, une simple explication de mots.

En disant que si le point A s'approche du point H, il est *évident* que l'angle ABC augmentera d'une certaine quantité, et que l'angle ABH diminuera d'autant, l'auteur énonce un axiome. Il en énonce un en ajoutant qu'il y aura un moment où ces deux angles seront égaux, un encore en ajoutant de plus que ce moment sera celui où le point A aura fait la moitié de sa course de C vers H. Ce sont là des vérités rationnellement évidentes.

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur la philosophie de l'auteur, notamment sur les origines qu'il attribue aux notions dont il s'occupe ; mais une critique complète m'obligerait à de longs développements. J'aime mieux prier le lecteur de se reporter à l'exposé de mon *Système philosophique* où il trouvera, je crois, des principes clairs et vrais sur cette matière.

Pour réfuter ici les conclusions de M. Bailly, il me suffit de lui dire :

Un axiome, ce que l'on entend par une vérité évidente en soi, n'est point ce que vous croyez.

Selon vous, si je vous ai compris, en disant que le tout est plus grand que sa partie, on ne fait que généraliser un *distinct* de l'idée de tout; c'est-à-dire que dans l'idée même de tout serait vraiment celle de plus grand que sa partie. Or, c'est là une erreur capitale. La qualité attribuée à un tout quelconque d'être plus grand que sa partie est une *conséquence* de ce tout quelconque ; mais elle ne se trouve pas vraiment dans le tout, elle ne fait pas partie de l'idée de tout.

Il en est ainsi des autres axiomes. La proposition : *Il n'y a pas d'effet sans cause, ou tout effet a une cause*, ne signifie pas que *tout ce qui a une cause a une cause :* non, ce serait là une affirmation oiseuse, stupide. Par effet, on entend tout ce qui arrive, tout phénomène : on juge qu'il faut quelque cause à un phénomène quelconque.

Il est des propositions qui ont pour objet d'affirmer que telle chose a telle dénomination, ou que telle appellation signifie telle chose. En ces cas, il n'y a pas d'évidence rationnelle, pas d'axiome. Tel est le cas où l'on dirait : *Un triangle a trois angles* ; ou bien : *La surface qui a trois angles s'appelle triangle.* Mais si je dis : *Tout triangle a trois côtés,* alors j'énonce un axiome, une vérité évidente par elle-même. Ici il n'y a pas seulement explication de la signification d'un mot, d'une expression.

Ainsi, quoi qu'en dise M. Bailly, les axiomes, les vérités évidentes par elles-mêmes, ne sont point des chimères, point des puérilités, et, tout au contraire, la science ne peut être solidement fondée que sur des principes de ce genre.

Le raisonnement n'est point seulement ce qu'il croit ; le syllogisme n'est point un procédé puéril, un instrument ridicule et stérile.

Cet argument :

Tous les hommes sont mortels ;

Jacques est un homme ;

Donc Jacques est mortel,

ne mérite point les traits sarcastiques que lui lance l'auteur. La proposition : Tous les hommes sont mortels, n'est pas vraiment la même que celle-ci : Pierre, Paul, Jacques et tous les autres hommes sont mortels; car on peut concevoir la première sans penser nullement à Pierre, à Paul, à Jacques, sans songer que Jacques est un homme. On peut donc faire ce raisonnement, ce syllogisme, sans tomber dans le ridicule qu'il y aurait à dire : Pierre, Paul, Jacques sont mortels; donc Jacques est mortel.

On peut d'ailleurs juger que Jacques est mortel en considérant qu'il est d'une race, d'une famille d'êtres qui sont tous mortels, les *hommes*, et non pas en le considérant individuellement. On dira donc que Jacques est certainement mortel en tant qu'homme, parce que tous les hommes le sont... Certes, je puis, sans ridicule, dire : Jacques mourra, car il est homme, et tout homme est mortel; et je ferai, en réalité, un raisonnement, un syllogisme.

On peut, il est vrai, raisonner, démontrer bien des choses par le raisonnement, sans se fonder sur une vérité générale, sur un principe universel. Si je dis, par exemple : *Cette pierre n'a pu tomber sur ce vase sans le briser*; *or ce vase n'est pas brisé, donc cette pierre n'est pas tombée sur ce vase*, je ferai un raisonnement, bien qu'il n'y ait aucune proposition générale, universelle, telle que celles-ci : *Tous les hommes sont mortels; le tout est plus grand que sa partie.*

Si je considère certain tout A, et telle partie B de ce tout, je dirai avec certitude que B étant contenu dans A, A est plus grand que B. Je n'ai pas besoin, pour cela, de juger, de penser qu'il en serait ainsi d'un tout quelconque et de sa partie; je n'ai pas besoin de généraliser, d'universaliser la vérité qui me paraît nécessaire dans tel objet, ni d'avoir préalablement dans ma pensée cette généralisation.

Dans les démonstrations où les géomètres invoquent tel axiome, cet axiome, par exemple : *Le tout est plus grand que sa partie*, il leur suffirait de dire que telle étendue étant contenue dans telle autre étendue, celle-ci est plus grande que la première. La démonstration serait complète néanmoins; mais on ne peut les blâmer d'invoquer un principe absolu, universel, qui est vrai : ici on peut appliquer avec raison cet adage : *Ce qui abonde ne vicie pas.*

Il est commode de poser d'abord les vérités universelles qu'on reconnaît : une fois qu'elles sont admises, le raisonnement, la discussion doit marcher sans encombre ; il ne s'agit plus que de savoir si les déductions sont logiques. Il est bon de dire à ses lecteurs : La science que je vais vous présenter sera fondée sur des vérités premières, et voici ces vérités; je n'en invoquerai pas d'autres. C'est ainsi que Legendre inscrit cinq axiomes en tête de sa géométrie.

Il est d'ailleurs des cas où l'on est obligé de généraliser, de présenter des principes universels, de fonder le raisonnement sur de tels principes. Si, en métaphysique, je veux démontrer que l'âme n'est pas matière, qu'elle n'a pas d'étendue, je dirai que toute substance étendue, quelque minime que soit son étendue, est divisible; que, d'un autre côté, le fait de penser ou sentir est indivisible, implique que la substance qui pense ou sent est indivisible; que conséquemment la substance qui a des sentiments, des pensées, l'âme, ne peut être étendue, ne peut être matière : raisonnement dont les prémisses et la conclusion sont universelles [1].

Non-seulement M. Bailly ne reconnaît pas les axiomes universels, mais il n'admet aucune vérité évidente par elle-même. Il ne reconnaît pas, à titre d'évidence de raison, que A, contenant B, est plus grand que B; il ne verrait là, apparemment, qu'un pléonasme; il dirait que c'est comme si l'on disait que A, plus grand que B, est plus grand que B.

Je proteste contre cette étrange assertion de

1. J'ai développé ce raisonnement dans l'*Exposé de mon système philosophique*.

l'auteur, que l'on ne peut raisonner que sur des rapports de quantité; que l'on ne peut démontrer d'une chose que ceci : « qu'elle est plus grande, ou plus petite, ou égale à une autre. » — Quand une théorie arrive à une telle conclusion, elle est jugée.

Le domaine des mathématiques est bien vaste, mais certes la raison peut légitimement se mouvoir en dehors de la sphère des quantités.

La guerre que M. Bailly fait à la dialectique n'est pas légitime. L'on a abusé de ce puissant moyen de conviction, mais ce n'est pas une raison pour le proscrire : de quoi n'a-t-on pas abusé? — Au reste, en dépit du coup de massue qu'il croit avoir porté au monstre, en dépit de l'anathème qu'il a lancé contre lui, il est plein de vie, de vigueur et d'avenir.

Il est triste de voir une haute intelligence se fourvoyer à ce point; il est regrettable que M. Bailly ait fait un gros livre pour saper des principes qui sont les vrais fondements de la science.

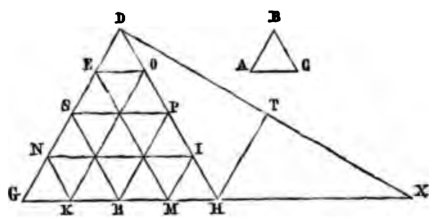
M. Bailly demande en outre que le triangle équilatéral soit adopté pour unité de surface à la place du carré qui jusqu'ici a été universellement choisi.

A ses yeux, la logique milite pour le triangle, et pourquoi? « Parce que, dit-il, l'entendement hu-
« main, en s'occupant du triangle, y trouve un
« côté et un angle de moins que dans le *carré*. Sa

« nature étant plus simple, il est bien plus facile à « saisir. Toutes les figures se décomposent en triangles et non en carrés... »

De plus, il voit, dans la substitution du triangle au carré, un moyen d'abréger considérablement les calculs et les travaux d'application. Selon lui, la géométrie s'édifierait, pour ainsi dire, d'elle-même; cette modification devrait entraîner la réforme des mathématiques et faire disparaître pour toujours les aridités qui les rendent inabordables à la plupart des esprits cultivés.

« Supposons, dit-il, un *triangle équilatéral* ABC « ayant un mètre de côté, et un autre triangle équilatéral GDH ayant un côté de quatre mètres. « Supposons que GH, DH et DG soient divisés chacun en 4 parties égales : chaque partie aura évi-



« demment un mètre. Joignons K au point N, le « point R au point S et le point M au point E; « joignons de même les points O, P et I aux « points E, S et N, puis aux points K, R, M.;

« nous aurons de la sorte 16 triangles équilaté-« raux ayant chacun un mètre de côté, et par « conséquent tous égaux au triangle ABC qui peut, « par le fait, être contenu 16 fois dans GDH. « Mais remarquons que $16 = 4 \times 4$: donc, *pour « avoir la surface d'un triangle équilatéral, il faut « multiplier un côté par lui-même.*

« Voyons maintenant ce qui va arriver lorsque « nous ferons croître un des côtés, et que le triangle, « par conséquent, cessera d'être équilatéral, pour « devenir isocèle ou scalène. Pour cela, prolon-« geons GH d'une quantité HX égale à GH, et joi-« gnons le point X au point D. Quelle sera mainte-« nant la surface du triangle GDX? De quoi se com-« pose ce triangle? De GDH, plus de DHX : je dis « que ces deux triangles sont équivalents. En effet, « joignons le point T, milieu de DX (et le point D « au point R). Nous aurons le triangle RDH qui « sera égal au triangle DHT, car les angles en R « et en T sont demis, ceux en H sont tiers ou de « 60 degrés, et ceux en D sixièmes; de plus, DH « est commun aux deux triangles : donc ils sont « égaux. Mais DTH = THX; par conséquent, le « triangle GDH, qui se compose de deux triangles « égaux aux deux triangles qui composent le trian-« gle DHX, a évidemment une surface égale à ce « dernier. Il résulte de là que le triangle GDX con-

« tient 32 triangles équilatéraux, puisqu'il est dou-
« ble de GDH; mais, pour l'obtenir, il a suffi de
« doubler GH : donc, sa surface peut se représenter
« par GX × GD. Puisque GD est une oblique qui
« fait avec la base GX un angle tiers, il en résulte
« que, *pour avoir la surface d'un triangle quel-*
« *conque, il faut multiplier la base par l'oblique me-*
« *née du sommet opposé, et faisant avec cette base*
« *un angle tiers.* »

Je n'accepte pas cette démonstration. Elle prouve seulement que, pour avoir la surface du triangle supposé, c'est-à-dire d'un triangle contenant un triangle équilatéral, plus un autre triangle égal à celui-ci, comme dans la figure indiquée par l'auteur, il faut multiplier la base par le côté du triangle équilatéral.

L'auteur, il est vrai, ajoute que l'on pourrait démontrer cette même proposition en menant par le point D une parallèle à GX; mais il ne donne pas cette démonstration.

On peut, en effet, démontrer la proposition en question en employant le procédé qu'il indique.

Soit (fig. 53) un triangle ABC, scalène ou isocèle, mais n'ayant pas d'angle tiers, et dont la base AC soit le plus grand côté, ou l'un des grands côtés du triangle, si ces grands côtés sont égaux.

Menez par le sommet B, KX parallèle à la base, menez aussi du point A sur KX l'oblique AE, faisant avec AC un angle tiers EAC, et du point E sur AC l'oblique EF, faisant avec AF un angle tiers EFA, joignez EC.

Les triangles ABC, AEC, ayant même base et même hauteur, sont équivalents. Les angles EAC, EFA étant tiers, le triangle AEF est équilatéral. Le triangle total EAC et le triangle partiel équilatéral AEF, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases AC, AF; donc la surface du triangle équitatéral EAF étant exprimée par AF $\times$ AE, celle du triangle EAC, et par conséquent celle de son équivalent ABC, le sera par AC $\times$ AE ou AC $\times$ BD, BD étant menée parallèlement à AE du point B sur CA prolongée, s'il est nécessaire.

Soit maintenant un triangle ABC (fig. 54) non équilatéral, mais ayant un angle tiers BAC. Prenant pour base le plus grand côté AC, menons l'oblique BD faisant un angle tiers avec AD. Les deux triangles ABD, ABC, ayant leurs bases sur une même droite et leurs sommets au même point B, sont entre eux comme leurs bases AC, AD. Or, le triangle équitatéral ABD a pour mesure triangulaire AD $\times$ AB; donc le triangle ABC a pour mesure triangulaire AC $\times$ AB; en d'autres termes, l'aire du triangle ABC, en unités triangulaires, est égal à AC $\times$ AB.

Donc, en unités triangulaires, l'aire d'un triangle quelconque est égale au produit de sa base par l'oblique menée du sommet opposé, et faisant avec cette base un angle tiers.

L'auteur voit dans cette méthode de grands avantages.

« Pour trouver, dit-il, la surface du triangle GDX « (voir la figure ci-dessus, dans le texte), la géomé« trie, telle qu'elle est faite, enseigne qu'il faut « prendre la moitié du produit de la base GX par « la hauteur DR. Pour déterminer DR, l'arpenteur « n'avait qu'une position, laquelle lui était enlevée « par les moindres obstacles, ce qui le forçait à des « calculs trigonométriques très-longs, tandis que la « nouvelle méthode fournit trois de ces positions; « car, du point D, on ne peut mener qu'une seule « perpendiculaire DR, tandis que de même point on « peut mener deux obliques, DG et DH. Si par ha« sard on ne pouvait avoir l'une, on prendrait l'autre, « et si les deux devenaient impossibles, on pourrait « avoir recours à la perpendiculaire, car en la divisant « par la racine deuxième de $\frac{3}{4}$, on aurait l'oblique.

« Dans la méthode employée, on est obligé de me« surer la perpendiculaire DR, de se transporter au « point D. Ce travail est inutile d'après celle que « nous proposons, car l'oblique GD, dont la lon« gueur nous est nécessaire, a sur la base GX une

« projection GR égale à sa moitié ; il nous suffit donc « de déterminer les directions GD et RD, et de dou- « bler GR pour avoir GD ; on pourrait aussi déter- « miner les directions GD et HD, et nous aurions « immédiatement GH = GD.....

« Si maintenant les difficultés du terrain étaient « telles qu'il fût impossible de déterminer la direc- « tion de l'oblique et celle de la perpendiculaire, on « pourrait employer un autre procédé pour obtenir « l'oblique : pour cela, on prolongerait la base d'une « quantité telle qu'on pût former avec elle et la ligne « du sommet un angle sixième (30°) ; la distance « comprise entre le pied de l'oblique et cette ligne « serait égale à l'oblique. Nous avons en effet l'angle « X = 30°, l'angle DHX = 120°, et aussi HX « = DH [1].

« Il est facile de voir maintenant que, pour trou- « ver la surface d'un triangle, *il suffit de mesurer « une ligne seulement.* Ainsi, pour avoir la surface « du triangle GDX (figure ci-dessus), il suffit de « mesurer GX, et de multiplier GX par 2GR ou par « GH. Pourvu qu'on ait un côté du triangle qu'on

1. Il me paraît que ce raisonnement est un cercle vicieux. L'auteur raisonne dans l'hypothèse où l'on ne pourrait déterminer la direction de l'oblique. En ce cas, apparemment, on ne saurait pas où serait le pied de cette oblique, et par suite on n'aurait pas la distance de son pied à la ligne du sommet formant un angle sixième avec la base.

« prendrait pour base, on peut en trouver la surface, « lors même que le sommet de ce triangle serait « inaccessible.

« Lorsqu'un des angles du triangle est tiers, il « suffit, pour avoir la surface de ce triangle, de faire « le produit des deux côtés qui comprennent cet « angle : si maintenant l'angle compris était double « ou deux tiers, on aurait à faire la même opération. « Le triangle DHX, qui a un angle de deux tiers « en H, a pour mesure DH × HX. »

De même que l'auteur substitue le triangle équilatéral au carré pour la mesure des surfaces, il remplace le cube par le tétraèdre régulier pour la mesure des volumes. Il invoque à cet égard des considérations analogues à celles qu'il a présentées en faveur du triangle équilatéral.

Cette théorie ou méthode de M. Bailly est-elle bonne? Est-il à désirer qu'elle soit admise dans la pratique?

L'on comprend de suite que si un rectangle a dix mètres de longueur sur un mètre de hauteur, il contient dix carrés d'un mètre de côté ; qu'autant de fois il y aura de surfaces égales à celle-ci dans un rectangle, autant de fois aussi il y aura dix carrés d'un mètre ; que, par conséquent, on obtient le nombre de carrés d'un mètre que contient un rectangle, en prenant le nombre de mètres de sa base autant de fois qu'il y a de mètres dans sa hauteur.

L'on comprend bien facilement que cette règle doit s'appliquer à un parallélogramme quelconque; que tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, et que son aire est conséquemment égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur. Tout cela est saisissant.

Il n'est point aussi aisé de voir comment s'obtient l'aire d'un triangle quelconque, en unités triangulaires.

Voilà ce qui explique pourquoi partout le carré a été pris pour unité de mesure, pourquoi ce n'est pas le triangle équilatéral qui a eu cet honneur[1].

Quand la figure est un rectangle ou à peu près, il est bien plus simple alors d'appliquer le carré au mesurage; or, c'est ce qui arrive le plus souvent dans les opérations de peu d'étendue.

Il est bon que l'on se rende généralement et facilement compte de la contenance des surfaces et des solides; or, il est bien plus difficile d'y parvenir en prenant pour unité un triangle même équilatéral

1. Lacroix, dans son traité d'arpentage, dit que le carré à été choisi, à cause de sa *régularité*. Ce n'est pas la véritable raison, puisqu'il y a d'autres figures régulières, le cercle, le triangle équilatéral, etc.

ou un tétraèdre même régulier, qu'en prenant un carré ou un cube pour unité.

Voyez combien seraient compliquées les propositions qui établiraient les rapports de l'unité tétraédrique avec les volumes. Pensez-vous que l'artisan, l'ouvrier, qui toise ses ouvrages, comprendrait aisément que *tout tétraèdre a pour mesure le produit de la surface de sa base multipliée par l'oblique menée du sommet opposé et faisant avec le plan de la base un angle égal à celui que fait l'arête du tétraèdre régulier avec le plan de la base?* Pensez-vous qu'il comprendrait bien, serait aisément convaincu qu'un prisme triangulaire se décompose en trois tétraèdres égaux en volumes, et qu'il a pour mesure *le triple produit de la base par l'oblique menée de la base opposée, et faisant avec la première un angle égal à celui que fait l'arête du tétraèdre avec le plan de la base?*

Il comprendra bien facilement, au contraire, qu'un prisme triangulaire ou autre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Un triangle est plus simple qu'un carré, en ce sens qu'il a un côté de moins; mais il ne s'ensuit pas que le triangle soit une mesure plus naturelle, qu'il soit plus aisé de se rendre compte du nombre de mesures de cette sorte contenues dans une surface, qu'il l'est de se rendre compte du nombre de carrés qu'elle comprend : c'est le contraire, du moins en général, qui a lieu. Il en est ainsi quant au tétraèdre.

Il est ordinairement possible d'obtenir promptement, sans la mesurer, la hauteur d'un triangle. Ordinairement, en effet, on peut déterminer, sur la base (prolongée s'il le faut), le point où la perpendiculaire doit être menée du sommet, mesurer la distance de ce point au sommet d'un angle que fait un côté avec la base, et mesurer cet angle. Le problème alors se réduit à trouver tel côté d'un triangle rectangle dont on connaît, outre l'angle droit, un des angles aigus et un côté adjacent à ces angles, problème que la trigonométrie résout promptement[1].

Quant aux alignements et mesurages préalables,

1. Soit c (fig. 55) le côté adjacent mesuré, b la perpendiculaire cherchée, B l'angle aigu mesuré, on a la proportion :

$$\mathrm{R} : \operatorname{tang} \mathrm{B} :: c : b, \text{ d'où } b = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{B} \times c}{\mathrm{R}}$$

On a aussi, en ce cas, pour déterminer b, C exprimant l'angle opposé au côté connu c, la proportion

$$c : b :: \sin \mathrm{C} : \sin \mathrm{B}, \text{ d'où } b = \frac{c \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}},$$

formule où C est connu, car on a $\mathrm{C} = 180° - (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$, A exprimant l'angle droit, et B l'angle aigu supposé connu.

Au moyen des tables, les opérations indiquées dans ces formules se font promptement.

ils demandent à peu près autant de temps qu'en exigeraient ceux que comporte le procédé proposé par M. Bailly.

Quelques minutes de plus ou de moins sont ici peu importantes.

D'ailleurs, on peut obtenir presque toujours la hauteur d'un triangle sans recourir aux formules trigonométriques. Il suffit, en effet, pour avoir cette hauteur, de prendre avec l'équerre sur la base du triangle un point A où doit être menée de son sommet la perpendiculaire, et de mesurer sur cette base un angle B de 45°, dont l'autre côté soit dirigé vers le sommet du triangle; car alors la perpendiculaire cherchée sera égale à la distance existante entre les deux points A et B de la base.

Doublant cette opération, c'est-à-dire déterminant sur la base la direction de deux côtés aboutissant au sommet du triangle à mesurer, et formant sur cette base deux angles de 45°, on obtiendrait la valeur de la perpendiculaire en prenant la moitié de la distance comprise entre les sommets de ces deux angles. Ce procédé conviendrait dans le cas où l'on ne pourrait pas déterminer immédiatement, sur la base ou son prolongement, le point où devrait être élevée la perpendiculaire cherchée.

Au moyen d'un ou plusieurs angles aigus de 60° ou de 30°, déterminés ainsi que je viens de le dire, on pourrait aussi trouver la perpendiculaire sans la mesurer[1].

En somme, je crois qu'il vaut bien mieux conserver le genre d'unités qui jusqu'ici a eu cours. Si en certains cas, l'emploi du triangle équilatéral offrait plus de célérité dans l'opération, on pourrait y recourir ; mais il serait bon de convertir en unités carrées le résultat obtenu, afin de maintenir l'uniformité de mesure. Cette conversion serait facile, car on sait que l'unité triangulaire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$ de l'unité carrée, ou, en d'autres termes, qu'un triangle équilatéral est égal à $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d'un carré ayant pour côté le côté du triangle équilatéral.

M. Bailly est naturellement conduit, par cet ordre d'idées, à demander une réforme radicale de la trigonométrie.

« Tout triangle dont on connaît les trois côtés, ou un côté et deux angles, ou un angle et deux côtés, est déterminé. S'il s'agit d'un triangle équilatéral,

1. Alors, en effet, on aurait, pour le cas de l'angle de 30°, $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$, b exprimant la perpendiculaire, et c le côté adjacent à l'angle droit ou la moitié de la distance entre les deux angles de 30°. — Si l'on prenait l'angle de 60°, on aurait $b^2 = a^2 - c^2$, où a représenterait l'hypoténuse ; et, comme en ce cas, a serait le double de c, côté connu, b^2 et par conséquent b seraient connus.

nulle difficulté pour trouver la valeur de trois éléments de ce triangle lorsque les trois autres seront connus. Si les trois côtés sont donnés, on voit immédiatement que les angles sont *tiers*; si l'on donne un angle et deux côtés, la valeur des autres éléments s'ensuit clairement pour chacun. »

Si le triangle devient scalène, que l'angle au sommet reste *tiers*, et qu'il s'agisse de trouver la valeur du côté opposé, « ce problème est fort peu « embarrassant, dit l'auteur, car nous avons vu en « géométrie plane que le côté x, opposé à un an- « gle *tiers* était égal à la racine deuxième de la « somme qu'on obtient en ajoutant les deuxièmes « produits des deux autres côtés et de laquelle on « retranche le produit de ces mêmes côtés : c'est- « à-dire que l'on a : $x^2 = a^2 + b^2 - ab$. »

« Mais si le triangle équilatéral devenant isocèle, l'angle au sommet augmente ou diminue, comment apprécier la longueur du côté opposé pour une augmentation ou une diminution quelconque de l'angle? — Telle est, dit-il, la question fondamentale de la géométrie. »

Voici comment M. Bailly résout cette question.

« Admettons, dit-il, que deux côtés varieront en « faisant un angle constant qui sera *tiers*, et que le « troisième conservera la même longueur pour tous « les cas. Envisageons, pour fixer les idées, le

« triangle équilatéral IOB (fig. 56). La ligne IB « fait avec OB un angle *tiers*. Si nous faisons mou- « voir le point I dans le sens de IB, il s'approchera « de plus en plus du point B : supposons-le arrivé « en H. Ce sera alors la ligne HC qui fera avec OB « prolongé un angle tiers HCO. On voit facilement « que l'oblique abaissée de l'extrémité du rayon sur « l'autre côté diminuera avec l'angle, et qu'elle « augmentera jusqu'à l'angle demi où elle atteindra « son *maximum*. »

Or, M. Bailly appelle cette ligne le *sinus* de l'arc ou de l'angle ; OC devient le cosinus, et AC la tangente, puis OA la sécante.

« Il résulte des conventions précédentes, dit-il « ensuite, que, pour un angle *tiers*, le *rayon* est « égal au *sinus*, est égal au *cosinus ;* que, pour un « angle *sixième*, la *tangente* est égale au *sinus*. Pour « un angle *demi*, le *sinus* est égal au *rayon* divisé « par la racine deuxième de 3 sur 4 ; la *tangente* est « le double de la *sécante* de l'angle tiers, et le cosi- « nus est la moitié du *sinus*. L'angle *deux tiers* a « le même *sinus* que celui de l'angle *tiers ;* son co- « sinus est égal au *rayon*, et pour ce cas la *tangente* « est *infinie*.

« On voit par là quel changement éprouvent les « lignes trigonométriques par la variation de l'angle « ou de l'arc, et comme on peut les mettre en rela-

« tion les unes avec les autres. Rien n'est plus facile « que de tirer des considérations précédentes, les « formules qui doivent servir de fondement à tous « les calculs trigonométriques....

« La première question que l'on se pose, après « avoir formulé les relations des lignes trigonomé- « triques entre elles, par la comparaison de trian- « gles semblables, faciles à choisir, est de savoir « comment, étant donnés les sinus de deux arcs, on « parvient à trouver le sinus de leur somme et de « leur différence. Le seul examen de la figure suffit « pour voir que rien n'est plus simple que la déter- « mination de ces différentes valeurs, et que la « considération de quelques triangles semblables « conduirait promptement à des formules qu'il est « inutile de donner ici, et desquelles il serait facile « de déduire le sinus du double d'un arc ou de la « moitié de cet arc. »

En somme, la réforme trigonométrique que propose M. Bailly ne me paraît pas heureuse. Elle ne pourrait être fructueuse qu'autant qu'on y substituerait l'unité triangulaire au carré; substitution qui, je le répète, ne me paraît point, tout pesé, désirable.

En résumé, la philosophie de M. Bailly n'est pas vraie; elle pèche essentiellement: il y a des axiomes rationnels, des vérités évidentes par elles-mêmes.

Les mathématiques pures et la philosophie elle-même doivent être fondées sur des principes de ce genre. Il vaut mieux, tout considéré, conserver l'unité carrée ; la substitution du triangle équilatéral et du tétraèdre régulier au carré et au cube ne serait pas avantageuse. L'on peut, dans bien des cas, se passer des formules trigonométriques pour déterminer des points inaccessibles, pour mesurer des surfaces ou des volumes; mais il ne s'ensuit pas qu'il faille généralement, en définitive, changer l'unité de mesure, ni rejeter comme inutile l'édifice trigonométrique que la science a élevé et qui lui fait honneur.

J'accorde que la science est susceptible de recevoir des réformes utiles. J'ai proposé, sur diverses parties, des réformes plus radicales que celles de M. Bailly.

J'accorde qu'il ne faut pas vouloir tout démontrer. Des géomètres ont parfois été par trop minutieux sous ce rapport. Les démonstrations mathématiques qu'on a produites n'ont point toutes la simplicité et la rigueur qu'elles doivent offrir. J'ai, à ce sujet, signalé les défauts, les vices de plusieurs théorèmes; mais il ne faut point rejeter généralement les axiomes, contester la valeur que les démonstrations puisent dans l'évidence rationnelle des principes : nier cette valeur, rejeter cette évidence de raison, c'est saper les fondements mêmes de la science.

Il ne faut point non plus faire fi du syllogisme et de la dialectique.

M. Bailly traite bien cavalièrement les œuvres des géomètres : il ne craint pas de dire, par exemple, que les deux tiers des géométries les plus en usage ne sont pas autre chose que du *pur bavardage*. Il me semble que les noms des auteurs, dont il qualifie ainsi les œuvres, lui commandaient plus de réserve dans l'expression.

Au sujet de sa théorie trigonométrique, M. Bailly paye bien quelque tribut à la chimère de la quadrature du cercle. « En considérant, dit-il, la figure 1 « (voir fig. 56), on voit que l'arc IHB est plus grand « que son sinus IB et plus petit que sa tangente AC ; « si nous envisageons au contraire l'arc HB, qui est « la moitié du premier, on s'aperçoit que le sinus est « égal à la tangente et que cette tangente est plus « grande que l'arc : il y a donc eu un moment où le « sinus a été égal à l'arc. La détermination de ce « point permettrait d'avoir pour les sinus des valeurs « exactes, et résoudrait définitivement le désespé- « rant problème de la quadrature du cercle. » — Cette idée-là est vaine et heurte la raison.

RÉFLEXIONS

AU SUJET DE L'ENSEIGNEMENT

DES MATHÉMATIQUES

Personne ne doute de l'utilité des mathématiques envisagées dans leur application. Qui ne sait la part qu'elles ont dans le développement et le progrès des autres sciences et des arts? Mais il est une influence générale qu'elles exercent ou peuvent exercer, et qui n'est pas aussi justement appréciée que leur utilité directe.

L'étude des mathématiques, en effet, tend à fortifier les esprits en développant la raison, cette haute faculté qui distingue l'homme de la brute, et qui est si utile dans la pratique de la vie.

La philosophie a beaucoup raisonné. Que de systèmes ont surgi! Mais, hélas! que la raison a été maltraitée, même et surtout, peut-être, dans ces pompeuses théories qui ont brillé du plus vif éclat. Tôt ou tard la vérité devra faire justice de toutes ces fausses splendeurs.

Or, l'étude des mathématiques, répandue, fortifiée, aurait une grande influence sur l'esprit philosophique. La rigueur du raisonnement s'introduirait dans la philosophie. L'habitude de raisonner exclurait bientôt ces sophistiques spéculations auxquelles s'abandonnent puérilement tant de philosophes, en vue de soutenir de fausses doctrines, des principes irrationnels pour lesquels ils se passionnent. La vraie philosophie triompherait.

Ainsi pourrait être satisfaite une des plus vives aspirations de l'homme. Avec le temps, la raison, exerçant toute sa puissance, dissiperait ce chaos de croyances philosophiques et religieuses qui se partagent le monde ; elle trônerait partout ; l'unité de croyance s'établirait enfin sur toute la terre, et de cette unité naîtraient d'immenses bienfaits pour l'humanité : ces bienfaits, je les ai signalés ailleurs[1]. Il est visible que l'unité de croyance rapprocherait les hommes, tendrait à en faire comme un seul peuple d'amis, de frères, et que la civilisation marcherait à pas de géant.

A ces points de vue, l'amélioration et la propagation de l'enseignement mathématique sont bien désirables.

On reproche souvent à l'homme, particulièrement au Français, sa légèreté, son inconsistance

1. Dans l'exposé de mon *système philosophique*.

dans la pensée, ses inconséquences dans l'ordre intellectuel et dans la vie pratique, et ce reproche est en général mérité. Eh bien! le meilleur remède est, je pense, dans l'amélioration et la diffusion de l'enseignement mathématique. Qu'il soit une vérité pour tous, et les esprits seront plus droits, plus justes, et la sagesse, une conduite logique autant qu'éclairée, succédera à cette sorte de déréglement, à ce caractère de légèreté, de frivolité, qui règnent aujourd'hui encore et qui sont si regrettables. Grâce au positivisme des mathématiques, l'on ne verra plus tant de folies, tant d'imprudentes spéculations, tant d'excès et d'abus de tous genres. — La morale y trouvera donc un puissant auxiliaire; tout y gagnera.

J'entends murmurer contre cette dernière assertion. La poésie, me dit-on, y gagnera-t-elle? Et les beaux-arts, y gagneront-ils? Est-ce dans les raisonnements sempiternels que réside le feu sacré qui anime le poëte, qui échauffe et inspire l'artiste? Si vous exercez tant la raison, vous tarirez la source de l'imagination : alors plus de littérature, plus de poésie, plus d'artistes. Tout se fera par $a + b$, tout se résoudra en chiffres; la vie ne sera plus qu'un calcul, qu'une supputation perpétuelle. Alors plus de charmes dans l'existence; tout sera matérialisé, pétrifié par l'esprit mathématique prédominant, généralisé dans les sociétés humaines.

Mais cette objection outrepasse beaucoup la portée de mes vues et les conséquences de leur réalisation. On doit certainement se garder de négliger l'enseignement littéraire : il faut qu'il soit aussi complet que possible; il faut cultiver toutes les facultés, faciliter leurs développements, mais les régler, leur donner une sage direction; et, sous ce rapport, l'enseignement mathématique peut être on ne peut plus efficace. Diriger une faculté n'est point l'étouffer; régler l'imagination n'est point en tarir la source. Le développement complet de la raison n'exclut pas, n'éteint pas le feu de l'inspiration poétique.

Pascal était-il un savant mathématicien? qui en doute? Était-il un grand écrivain? qui en doute? Et Descartes, et Leibnitz, et Newton, qui ont porté si haut la science mathématique, étaient-ils des hommes illettrés, sans style, sans imagination? Dans l'antiquité, cette science était-elle cultivée par les plus grands esprits, par les plus brillants écrivains? Oui. — Platon, cette imagination si féconde, si poétique, était le plus grand géomètre de son temps; il cultivait les sciences exactes avec ardeur; il y attachait une telle importance que nul n'était admis dans son école s'il n'avait des connaissances étendues en géométrie. Sur le frontispice de l'*Académie*, on lisait ces mots : *Nul n'entre ici s'il n'est géomètre.* Ainsi, dans l'opinion de Platon et des autres philosophes de ce temps, la géométrie, la science des mathématiques, devait être la base de l'instruction, l'introduction à la philosophie.

C'est une grande erreur de croire que l'esprit mathématique est incompatible avec l'esprit littéraire. Un beau poème n'a-t-il pas aussi sa logique, sa rectitude, un ordre, une sorte de régularité dans son développement? Ne craignez pas que l'imagination soit tarie par le calcul. Désirez plutôt que tout le monde raisonne et beaucoup ; et certes rien ne fait plus raisonner que les mathématiques. — Les poètes, les littérateurs, les artistes ne manqueront point, et leurs œuvres ne perdront point à être plus mûrement réfléchies, plus sagement, plus rationnellement conçues.

Beaucoup d'esprits répugnent à l'étude des mathématiques : on leur reproche leur sécheresse, leur positivisme même, l'on semble affecter pour elles une sorte de mépris. N'ayant pas le courage de s'y livrer, on rabaisse le mérite des hommes qui leur ont particulièrement consacré leur intelligence. Il me paraît que l'éloignement général qu'on éprouve pour cette science vient surtout des difficultés qu'elle présente. Ne pouvant aisément la comprendre, l'orgueil s'efforce de la ravaler, de lui infliger le dédain. Je serais tenté de comparer ces détracteurs des mathématiques à ce renard de la Fable, qui, ayant la queue coupée, conseillait aux autres renards de retrancher ce membre inutile. « Tournez-vous, Messieurs, et l'on vous répondra. »

Pour relever et favoriser l'étude des mathématiques, il y a plusieurs moyens que je résume ainsi :

1° Perfectionner, autant que possible, la science et l'enseignement ;

2° Encourager, autant que possible, les progrès et les succès des élèves et des maîtres.

Premièrement. Ce qui peut surtout attirer vers l'étude des mathématiques, c'est la rigueur rationnelle dont cette science est si éminemment susceptible. Il faut donc faire disparaître de la théorie les irrationalités trop nombreuses qu'elle présente. A cet égard, je crois avoir indiqué les réformes essentielles qu'elle réclame. Il faut que la raison y trouve une pleine satisfaction, que rien, ni dans les principes, ni dans les démonstrations, ne puisse la froisser.

Quoi qu'on fasse, cette science aura des difficultés, des complications; mais on peut simplifier beaucoup certaines parties, les présenter avec plus de clarté, de justesse, et les mettre ainsi plus à la portée des intelligences, soit dans les livres, soit dans l'enseignement oral. Il y a beaucoup à faire sous ces rapports.

L'État doit tâcher de procurer à ses établissements le meilleur enseignement possible : il faut donc que l'enseignement des mathématiques soit le même, soit uniforme dans ses écoles : la même arithmétique, la même géométrie, la même algèbre, du moins pour une même classe, doivent y être enseignées. Il ne faut pas laisser au professeur le choix des livres.

Je ne voudrais pas que l'on adoptât, dans leur intégralité, les livres tels qu'ils sont émanés de leurs auteurs; je ne voudrais pas qu'on adoptât, par exemple, exclusivement la géométrie de Legendre, ou celle de Lacroix, ou celle de tel autre auteur. Il faudrait qu'une commission de savants, de professeurs éminents, fût chargée du soin de constituer les livres destinés à l'enseignement. On peut, jusqu'à un certain point, faire de l'éclectisme en mathématiques, et cela d'une manière utile pour la science et l'enseignement. Tel auteur peut être clair, lucide, rationnel en certains points, et obscur, irrationnel en d'autres parties. Je conçois qu'on adopte, en géométrie, telle démonstration de Legendre, telle autre de Lacroix. Il y a, dans les ouvrages, tant anciens que modernes, de bons éléments; il s'agit de les réunir, et d'en écarter les vices, les irrationalités qu'offre les ouvrages même les plus recommandables en ce genre.

Que les formules soient aussi simples et aussi claires que possible; qu'on évite, par exemple, l'emploi de signes faciles à confondre par leur grande ressemblance. Pourquoi employer simultanément γ (gamma) et y, α (alpha) et a? Que de fois il est arrivé de confondre ces signes!

Que l'enseignement oral soit présenté avec la plus grande clarté. Que le professeur s'efforce de se mettre à la portée de toutes les jeunes intelligences auxquelles il s'adresse; qu'il ne précipite pas ses paroles; qu'elles sortent lentement, avec ordre : certains professeurs semblent avoir moins en vue d'être compris que de prouver l'imperturbabilité de leur savoir; ils présentent rapidement un déluge de propositions qui accablent l'esprit de l'élève. Que le professeur ne craigne point de se répéter, de répéter surtout les parties difficiles, compliquées; qu'il tâche de les rendre aisément accessibles; qu'il se rappelle les difficultés qu'il lui a fallu surmonter pour arriver à la possession de la science; qu'il s'identifie, pour ainsi dire, avec l'élève, et cherche, à ce point de vue, les expressions les plus intelligibles.

Qu'il songe bien que tous ceux qui l'écoutent sont loin d'avoir le même degré d'aptitude à comprendre son enseignement ; et que pourtant il faut tâcher d'inoculer à tous le savoir, car tous peuvent en retirer de grands avantages. Souvent, d'ailleurs, le génie peut se trouver en germe dans une intelligence paresseuse; tel qui saisit et retient admirablement tout ce qui est soumis à son intelligence, peut-être dépourvu de cette haute faculté[1].

Que le professeur veille à ce que chaque élève puisse être à portée du tableau. C'est là un point très-important. Il y a des élèves affectés de myopie : le professeur doit les faire placer près du tableau, du moins s'ils ne remédient pas à cette infirmité par l'usage de lunettes.

Que chaque élève ait son tour pour être interrogé, que nul ne soit négligé par le professeur, qui doit tâcher de stimuler la paresse, en faisant ressortir les avantages de la science.

Le professeur, dans son enseignement, doit se garder de jeter le doute sur les axiomes en général, de faire l'apologie de doctrines subversives,

1. Dans ma doctrine philosophique, il n'y a pas en nous des facultés particulières, des moyens spéciaux ; l'âme est une et absolument indivisible ; mais ici, je me place au point de vue de l'apparence : il nous semble que nous avons des *facultés*, des *dispositions*, des *tendances*, des *germes intellectuels*.

telles que celles de M. Tompson. S'il doute des axiomes, c'est à dire des bases véritables de la science, il n'est pas digne de l'enseigner; qu'il se retire. Il faut, avant tout, que le professeur ait foi en ce qu'il professe; si la foi lui manque, il n'apportera pas dans ses leçons le zèle, la fermeté qu'il y doit apporter, son scepticisme percera ses affirmations et le doute est contagieux. Toutefois, le professeur doit toujours s'adresser à l'intelligence, à la raison, jamais à la foi aveugle; il doit sacrifier théoriquement, tout ce qui blesse la raison; s'il se permet des hypothèses irrationnelles, que ce ne soit qu'en vue de la pratique, et qu'il ne manque pas de le dire.

Qu'enfin, il se garde de baser la science sur des spéculations subtiles, chimériques, puériles, comme celles que j'ai critiquées en parlant du système de M. Busset.

Secondement. Il faut encourager le plus possible l'enseignement des mathématiques, et dans les élèves et dans les maîtres; que l'État ne néglige rien pour leur donner une vive impulsion.

Il pourrait, par exemple, accorder des primes aux élèves qui se seront le plus distingués dans les mathématiques, principalement dans les mathématiques élémentaires, qui sont d'une utilité plus générale. Qu'il donne des bourses, des demi-bourses, ou d'autres avantages pécuniaires aux enfants pauvres qui auront le mieux réussi dans cette partie.

Quant aux maîtres, il serait bon que des distinctions et même des primes vinssent récompenser ceux qui ont plus marqué par leur zèle, par la solidité et par les succès de leur enseignement.

L'État doit tendre de tous ses efforts à relever la science des mathématiques dans l'estime générale, à effacer cette espèce de prévention qui pèse sur elle et la met au-dessous des études littéraires.

Je ne demande point que l'on fasse de tous les jeunes gens des mathématiciens profonds, qu'ils soient tous initiés aux mathématiques transcendantes. Non vraiment; mais que, du moins, en sortant de l'école, ils sachent bien l'arithmétique, la géométrie élémentaire et une partie notable des éléments de l'algèbre. Or, la plupart sont bien loin d'avoir ces connaissances : trop souvent on en trouve qui sont, même en arithmétique, d'une ignorance déplorable.

Il y a lieu de considérer l'enseignement sous le rapport du mode employé pour le distribuer. A ce point de vue, il est ou individuel, ou simultané, ou mutuel, ou mixte.

L'enseignement individuel a l'inconvénient bien grave d'exiger un trop grand nombre de maîtres relativement au nombre des élèves. Il faut propager autant que possible le savoir, et conséquemment faire en sorte qu'un même professeur puisse suffire à un très-grand nombre d'écoliers. Au reste, l'enseignement simultané à cela de bon qu'il excite et entretient entre les élèves une émulation profitable aux études; et quand il est bien organisé, bien dirigé, il peut éviter les inconvénients qui portent quelques personnes à préférer l'enseignement individuel.

L'enseignement mutuel a été appliqué avec avantage aux écoles primaires. On pense généralement qu'il ne serait pas aussi heureusement applicable aux études supérieures, à la géométrie, à l'algèbre, etc. C'est une question que je ne saurais résoudre d'une manière absolue. L'expérience doit être avant tout consultée, et l'expérience n'est pas encore faite, du moins complétement.

L'enseignement mixte, qui serait une sorte de fusion de l'enseignement simultané et de l'enseignement mutuel, doit-il être préféré? L'expérience devra aussi répondre à cette question, en montrant les avantages ou les inconvénients qui pourraient résulter de cette combinaison.

L'on distingue encore l'enseignement au point de vue de la marche à suivre dans la transmission des connaissances. Sous ce rapport, l'enseignement est dit *synthétique*, quand il procède des principes aux conséquences, du général au particulier, et *analytique*, lorsqu'il suit la voie opposée.

L'enseignement analytique n'a guère été pratiqué. Il a eu, dans ces derniers temps, un apôtre en M. Jacotot, qui a produit une méthode nouvelle sous le nom d'*Enseignement universel.* Il soutint que la méthode synthétique *abrutissait* les intelligences, il voulut les *émanciper.*

Les livres de M. Jacotot sont écrits avec talent, avec esprit, mais ce sont plutôt des diatribes contre la méthode synthétique et ses nombreux partisans, que des œuvres de discussion raisonnée. Il est vrai que ses adversaires ne l'épargnaient guère dans cette polémique passionnée.

Cette grave question doit être examinée de sang-froid, sans passion, non pas *ab irato, unguibus et rostro,* comme elle l'a été trop souvent.

L'exposé et l'appréciation de cette méthode comporteraient de très-longs développements, que je ne pourrais lui donner sans sortir du cadre restreint que je me suis tracé. Mais je ne crois pas inutile d'en présenter un aperçu général, et d'en discuter succinctement la valeur : elle a eu trop de retentissement pour que cet examen soit sans intérêt pour le lecteur.

En quoi consiste la méthode Jacotot? Est-elle plus naturelle que la méthode ordinaire? Est-elle plus efficace? Telles sont les questions principales que je vais examiner.

C'est dans un livre intitulé : *Langue maternelle*, que M. Jacotot a présenté les fondements de la théorie dont il s'agit : c'est donc là surtout que l'on doit chercher la solution des questions que je viens de poser. D'autres ouvrages de l'auteur, notamment le livre intitulé : *Droit*, fournissent aussi des éclaircissements.

PREMIÈRE QUESTION. En quoi consiste la méthode ou l'enseignement Jacotot?

« Je pense que tout homme est un animal raison-« nable, capable, par conséquent, de saisir des rap-« ports. Quand l'homme veut s'instruire, il faut « qu'il compare entre elles les choses qu'il connaît, « et qu'il y rapporte celle qu'il ne connaît pas en-« core.

. . . .

« Faites apprendre un livre à votre élève, lisez-le « vous-même souvent, et vérifiez si l'élève comprend « tout ce qu'il sait, assurez-vous qu'il ne peut plus « l'oublier ; montrez-lui enfin à rapporter à son « livre tout ce qu'il apprendra par la suite, et vous « ferez de l'enseignement universel..... *Sachez un* « *livre, rapportez-y tous les autres* : voilà ma mé-« thode. »

C'est ainsi que l'auteur, dans un avant-propos, résout lui-même la question dont je m'occupe.

L'élève est dirigé de manière à ce qu'il sache, aperçoive de lui-même, autant que possible, soit directement, soit comme conséquence, soit comme rapport de ressemblance, tout ce qui est contenu dans le livre, dans le texte quelconque qu'il doit apprendre par cœur, et auquel il doit rapporter tous les autres. A ce point de vue on dit que la méthode est synthétique.

S'agit-il, par exemple, d'enseigner la lecture? — Par le vieux procédé on présente d'abord à l'élève un alphabet. — Jacotot veut qu'on lui présente tout d'abord un texte, le premier livre de Télémaque, par exemple. — La vieille méthode dit à l'élève *a*, puis *b*, puis *c*, etc. — Suivant Jacotot, on lui dira : *Calypso*, puis *Calypso ne*, puis *Calypso ne pouvait*, etc.

On dit généralement à l'enfant que *b* et *a* font ensemble le son *ba*, *b* et *e* le son *be*, etc., lorsque, d'après Jacotot, on montre *ca*, *pou*, *pouv*, *lyp*, *ait*, etc.

Quand on montre à l'élève quelque mot entier, le procédé Jacotot montre un *b*, un *c*, un *a*, etc.

Ainsi, la méthode Jacotot est, ici du moins, exactement l'inverse de la méthode ordinaire. Dans celle-ci, on va du simple au composé, dans l'autre on va du composé au simple.

Pour l'enseignement d'une langue, l'élève apprendra par cœur un livre écrit en cette langue, et au moyen d'une traduction mot à mot, qui lui sera donnée, il devra déduire lui-même les règles, la *grammaire* de la langue dont il s'agit. Il rapportera d'autres textes à celui qu'il aura appris par cœur.

S'il s'agit du droit, l'élève apprendra par cœur un texte, un titre du Code civil, par exemple, et il y rapportera toutes les autres parties du droit.

« La méthode de l'enseignement universel, dit « Jacotot, est tout entière dans ces paroles : Ap- « prendre quelque chose et y rapporter tout le « reste, d'après ce principe : Tous les hommes ont « une égale intelligence. »

« Tout est dans tout », dit-il encore. — « Cet « axiome, tout est dans tout, est la base des exer- « cices que l'on doit faire faire à l'élève ; qu'il sa- « che quelque chose, qu'il le répète *perpétuellement*, « et qu'il y rapporte tout le reste. »

Et il explique ainsi ces maximes :

« Quand nous disons : Apprenez quelque chose « et rapportez-y tout le reste, cela signifie : Tout « ouvrage humain peut être rapporté à un autre ; « tout discours au discours contraire, et s'ils ne sont « pas identiques comme vrais, ils le seront toujours « comme intellectuels.

« Tout est dans tout, cela signifie : Exercez votre « élève à comparer toutes les peintures du même « sentiment, et à voir en quoi consiste la ressem- « blance et la différence. »

On demande à l'auteur de l'*émancipation intellectuelle*, si les mathématiques sont dans Télémaque : il répond que les mathématiques sont une langue; que, dans Télémaque, les réflexions s'offrent sous plusieurs formes différentes, qu'en mathématiques c'est le même artifice de l'esprit humain : on emploie la transformation. Ainsi au lieu de nous présenter *trois* sous la forme 3, on le transforme en $3 + 2 - 2$.

C'est par ce qu'il appelle la *Philosophie panécastique*, que l'auteur s'efforce de justifier sa maxime : *tout est dans tout.*

« Cette philosophie, dit M. Jacotot, consiste exclu- « sivement dans les réflexions que peut suggérer à « un homme l'étude des discours et des ouvrages « humains, considérés seulement comme des mani- « festations d'une intelligence... ; elle peut être dé- « finie : Connais ton intelligence et rapportes-y « celles des autres. »

Et ailleurs :

« Une production d'une intelligence est pour nous « le type mnémonique de toutes les productions de « toutes les intelligences. Tel est le but de la philo-

« sophie nouvelle de trouver tout dans tout. »

. . . .

« Le panécasticien a toujours raison; il dit ce « qu'il voit, il dit ce qu'il pense de l'égalité des in- « telligences, il ne cherche pas en quoi elles peuvent « différer, mais en quoi elles peuvent se ressembler. « Cette étude ne le conduit pas à une vérité incon- « testable, mais elle est une source inépuisable « d'instruction solide et durable dans la mémoire. « Elle est la base de l'enseignement universel, et « l'édifice que chacun doit élever sans conseils, sans « explications, sans exemples, pas même de la part « du fondateur : cet édifice est construit par l'éman- « cipation intellectuelle. »

La méthode Jacotot suppose que le maître exerce le plus possible, par ses questions, la sagacité de l'élève, en le mettant à même de trouver, de saisir des rapports, la vérité, dans ce qu'il a déjà appris.

L'auteur assure que, par sa méthode, on peut enseigner aux autres ce qu'on ignore soi-même; ainsi un père, une mère pourront toujours diriger eux-mêmes l'instruction de leurs enfants. — Vous ignorez complétement n'importe qu'elle langue : l'anglais, l'italien, le grec, l'hébreu : vous êtes à même de l'enseigner, c'est à dire de diriger les exercices de l'élève dans l'étude de cette langue.

Je puis maintenant me poser la deuxième question : la méthode Jacotot est-elle plus naturelle que la méthode ordinaire?

Pour résoudre cette question, il faut considérer l'objet et le but de l'enseignement.

Prenons l'enseignement de la lecture. Que se propose-t-on, dans cette étude? — On veut que l'élève arrive à bien lire tous les mots d'une langue, mots composés d'un certain nombre de lettres ayant chacune une valeur déterminée, une certaine prononciation convenue; on veut que partout où l'élève trouvera *a*, par exemple, il prononce le son *a*; que partout où il verra *ba*, il prononce le son *ba*, etc. Il ne s'agit pas seulement d'apprendre à lire tels mots, les mots *Calypso*, *ne*, *pouvait*, par exemple, mais de lire tout mot quelconque composé de caractères employés pour l'expression d'une langue. Dans ce but, il est donc naturel de commencer par apprendre à l'élève à distinguer et prononcer ces lettres, puis les syllabes qui peuvent en être formées; puis à former des mots avec ces syllabes. Il n'est pas naturel, il n'est pas logique, d'après le but qu'on poursuit, de présenter d'abord des mots entiers à l'enfant, de lui prononcer ces mots, de le faire descendre de ces *touts*, à leurs parties constitutives, aux syllabes, aux lettres, de le faire généraliser ensuite la valeur, la signification de ces lettres, de leurs assemblages; c'est prendre le chemin le plus long, c'est faire un circuit inutile, du moins au point de vue où je me place.

Il n'est pas naturel non plus, lorsqu'on peut apprendre directement à l'élève les règles d'une langue, de l'obliger à déduire lui-même une grammaire d'un ou plusieurs textes, par un effort continu d'attention qu'on peut lui éviter. C'est encore prendre ici le chemin le plus long, le plus difficile.

Il n'est pas naturel de rapporter à un livre, à un texte tous les autres, comme l'entend la méthode : c'est là un artifice.

Troisième question. La méthode Jacotot est-elle plus efficace que la méthode ordinaire? — Peut-elle faciliter l'enseignement, faire en somme qu'il soit plus prompt, plus approfondi, plus complet?

J'ai dit que dans la lecture et la grammaire, elle implique un circuit inutile, une perte de temps.

La méthode Jacotot tend à surcharger la mémoire, l'esprit.

Il ne suffit pas, pour s'instruire réellement et utilement, de trouver des rapports; il faut encore que ces rapports aient essentiellement trait à la connaissance que l'on veut obtenir. Il faut craindre de dépenser inutilement les forces de l'intelligence, de la mémoire. La méthode Jacotot, pratiquée rigoureusement, conduirait à des digressions continuelles qui ne sont guère compatibles avec l'étude approfondie de la science.

Je veux savoir le droit, le code civil, par exemple; je devrai sans doute rapprocher les articles les uns des autres, les comparer sous tous les rapports qui peuvent jeter quelque lumière sur le sens réel des dispositions particulières et sur l'esprit général de la loi du code dont il s'agit. Mais pourquoi me demander de rapporter à un article tous les autres? Pourquoi même vouloir que je rapporte tous les articles d'un titre à tous les articles d'un autre titre.

Quelle utilité, pour apprendre le droit, de remarquer particulièrement que tel article de la loi est, comme tel autre auquel on le rapporte, une œuvre intellectuelle. Est-ce que je ne sais pas d'avance que la loi entière, que toutes les lois humaines sont des œuvres intellectuelles? Est-ce qu'il faut pour cela une méthode d'enseignement?

Est-ce au point de vue mnémonique, que cette remarque serait utile? Je ne vois pas quel profit la mémoire peut tirer d'une observation qui ne s'applique pas plus à une œuvre intellectuelle qu'à une autre.

La mnémonique a des procédés spéciaux très-puissants auxquels on peut recourir.

Que vaut cette assertion que, par la méthode

Jacotot, l'on peut enseigner ce qu'on ne sait pas, une langue quelconque, par exemple?

Avec un livre, on peut apprendre soi-même une langue, une science. Ce livre étant entre les mains d'un élève, on peut l'aider à apprendre cette langue ou cette science sans la connaître soi-même, en le dirigeant, en le mettant sur la voie, en l'y ramenant lorsqu'il s'en écartera : je l'accorde; mais ceci n'implique pas absolument la méthode Jacotot. Donnez une bonne grammaire italienne-française, ou anglaise-française, par exemple, à un élève connaissant le français, il pourra, avec votre aide, bien que vous ignoriez l'italien, ou l'anglais, et même sans votre aide, parvenir à savoir l'une ou l'autre de ces langues, et je pense même qu'il lui sera bien plus facile d'arriver à ce résultat, au moyen d'une grammaire, que par le procédé consistant à aborder immédiatement un texte italien ou anglais avec une traduction.

Est-il vrai que toutes les intelligences sont égales, que tout ce que comprend une personne quelconque peut être compris aussi facilement, aussi promptement par toute autre personne, en exceptant, bien entendu, les insensés, les fous?

L'expérience s'élève contre l'égalité des intelligences. Est-elle aussi rejetée par la raison, par la saine philosophie?

D'après ma philosophie[1], il ne peut y avoir deux êtres semblables, deux intelligences semblables sous aucun rapport, et entre des qualités essentiellement différentes, hétérogènes, il n'y a vraiment aucun rapport de degrés.

Il est des choses qu'on ne saurait comprendre, connaître véritablement : certes je ne saurais connaître vraiment une substance immatérielle et sans durée ; et pourtant ma raison proclame la réalité, la nécessité d'une telle substance[2]. Mais, à part cette sorte d'incapacité absolue, qui résulte de la nature même des choses, on ne peut rationnellement affirmer qu'une personne est dans l'impossibilité d'arriver à telle connaissance, qu'elle ne saura jamais la géométrie par exemple ; de même on ne peut être rationnellement certain qu'une personne est capable de s'élever à une connaissance quelconque.

Sans doute, il ne faut décourager personne : ne dites jamais à un enfant, à un élève qui apprend difficilement : *Tu ne seras jamais qu'un ignorant, tu n'as pas d'intelligence ;* mais ne lui dites pas non plus que son intelligence est égale à celle de tous les autres, à celle de tel élève qui fait de rapides progrès : qu'il sache au contraire qu'il a besoin de

1. Voir l'exposé de mon *système philosophique.*
2. Voir mon *système philosophique.*

plus d'attention, de plus d'efforts pour comprendre, pour saisir les vérités qui lui sont présentées, les rapports qui s'offrent à son esprit.

Suivant la méthode Jacotot, l'enseignement des mathématiques consisterait notamment à rapporter à un livre de mathématiques toutes les autres œuvres de ce genre. — Pour approfondir une science, et surtout pour se mettre en état de l'enseigner, il peut être fructueux de comparer les livres qui traitent du même sujet, et même de rapporter à tel livre tous les autres; mais c'est là un immense travail qu'il ne faut point imposer à l'élève.

Sera-ce seulement un abrégé, un épitomé de mathématiques, auquel seront rapportés tous les ouvrages de mathématiques? L'élève trouvera-t-il, en substance, dans cet épitomé, tout ce qu'il trouvera dans les livres plus étendus. Si toute la substance s'y trouve, l'épitomé ne différera donc que dans l'expression plus abrégée? Quoi qu'il en soit, il convient que les traités de mathématiques élémentaires soient aussi simples, mais aussi complets que possible, et l'enseignement ordinaire ne demande pas autre chose.

MM. F. et H. V. Jacotot, fils de l'auteur de la méthode, ont publié un épitomé de mathématiques pour l'enseignement universel. Là, pour faire de l'analyse et répondre au vœu de la méthode, l'on montre, dans une même figure envisagée sous différents rapports, la ligne droite, le plan, plus ou moins de lignes ou surfaces courbes, le solide, des angles droits, obtus, aigus. De plus, on présente, dans un enchaînement de propositions, les principales phases de la science si vaste dont il s'agit. Mais, suivant moi, ce petit livre, dont je reconnais d'ailleurs le mérite, est loin de justifier l'axiome : *Tout est dans tout*, en ce sens qu'il contienne vraiment toutes les mathématiques.

Si vous entreprenez de condenser dans un abrégé toutes les mathématiques, toute leur substance, vous risquerez fort d'être obscur et incompris des élèves ; et c'est, je pense, ce qui pourrait arriver à l'épitomé de MM. Jacotot fils, mis entre les mains de personnes étrangères à cette science.

Le fondateur de l'enseignement universel publia un livre intitulé : *Mathématiques*, qui ne répond guère à son titre, car il y est très-peu parlé de mathématiques.

En résumé, la méthode Jacotot tend à surcharger, à fatiguer la mémoire, l'esprit ; bien peu de personnes, ce me semble, pourraient s'imposer ce travail herculéen.

Il faut vulgariser le savoir, répandre partout l'instruction ; il faut donc une méthode qui convienne à la généralité des intelligences.

Quoi qu'en aient dit Jacotot et ses disciples, le maître explicateur n'est point une calamité, des explications ne sont pas *abrutissantes*, elles peuvent singulièrement faciliter et hâter l'acquisition, la propagation du savoir.

On cite, il est vrai, des résultats merveilleux de l'application de la méthode Jacotot. Ainsi, on parle d'une jeune dame qui commença l'étude du latin par Horace, dont elle expliqua le premier livre de l'art poétique après deux mois d'études.

Ce résultat n'est pas si prodigieux, puisque cette dame, d'après la méthode, avait appris par cœur le texte latin et une traduction mot à mot de ce texte. Mais cette dame, qui du reste était sans doute douée d'une très-haute intelligence, d'une grande aptitude à l'étude des langues, savait-elle vraiment le latin? Connaissait-elle bien les règles de la langue latine? Eût-elle fait un *thème* sur l'application de ces règles? Les fruits hâtifs de serre chaude valent-ils ces fruits nés et développés naturellement sous l'influence de l'air libre et des rayons du soleil ?

Admettons que cette personne ait pu déduire elle-même la syntaxe latine de l'étude comparée des parties du texte latin : trouvera-t-on beaucoup d'intelligences assez fortes, assez persévérantes pour accomplir cette rude tâche ?

Il y a toutefois quelque chose de bon à prendre dans les idées ingénieuses de Jacotot. Sans appliquer positivement et strictement sa méthode, il est à désirer que les maîtres portent l'élève à tirer de lui-même bien des vérités, bien des rapports qu'on lui évite la peine de chercher, en les lui énonçant tout d'abord. Il faut exercer autant que possible, dans la limite de son temps et de ses forces, son esprit, sa sagacité, et sous ce rapport on trouvera dans les œuvres de l'auteur de l'enseignement universel des avis utiles ; mais la méthode Jacotot, intégralement et généralement appliquée, c'est ce qui ne me paraît point désirable.

NOTE

Les procédés de l'arithmétique des infinis étant peu connus, je crois convenable d'ajouter quelques explications à ce que j'en ai dit dans le cours de ce livre; je les puise dans un traité où le géomètre Deydier a reproduit avec clarté et développement la méthode dont il s'agit.

En voici les bases :

1° La suite infinie des égaux 1. 1. 1. 1, etc., est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 1; car le dernier terme de cette suite est 1, et 1 multiplié par le nombre des termes est la même chose que 1 pris autant de fois qu'il y a de termes. Or, 1 pris autant de fois qu'il y a de termes est la même chose que la suite 1. 1. 1. 1, etc. Donc, la suite est égale au dernier terme multiplié par le nombre des termes, et par conséquent le rapport de l'un à l'autre est comme 1 à 1.

2° La suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, etc., est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2; car la somme des deux premiers termes $0 + 1$ est 1, et le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes, qui est 2, donne 2; donc la somme 1 est ici au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2.

Prenons de même les trois premiers termes 0. 1. 2; leur somme est 3, et le dernier terme 2 multiplié par le nombre des termes 3 est 6; ainsi le rapport de l'un à l'autre est comme 3 à 6, ou comme 1 à 2.

En continuant ainsi de prendre un plus grand nombre de termes, on trouve toujours que la somme est au dernier terme multiplié par le nombre de termes, comme 1 à 2. Donc, puisqu'en avançant toujours, ce rapport ne varie jamais, il en résulte que la suite, étant devenue infinie, sera encore au dernier terme multiplié par le nombre de termes, comme 1 à 2.

3° La suite infinie 0. 1. 4. 9. 16, etc., des carrés est au plus grand et dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3.

Prenons d'abord les deux premiers termes 0. 1 : leur somme est 1, et le dernier terme, pris autant de fois qu'il y a de termes, est 2; ainsi leur rapport est $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ donc il y a $\frac{1}{6}$ au-dessus du tiers.

Prenons de même les trois premiers termes 0. 1. 4 : leur somme est 5, et le dernier terme 4 pris 3 fois est 12; donc le rapport est $\frac{5}{12}$ ou $\frac{4}{12} + \frac{1}{12}$; ainsi il y a un douzième au-dessus du tiers, mais ce douzième est moins que $\frac{1}{6}$, que nous avons trouvé en ne prenant que deux termes.

Prenons les quatre premiers termes 0. 1. 4. 9 : leur somme est 14, et le dernier terme pris quatre fois est 36 Le rapport est donc $\frac{14}{36}$, ou $\frac{7}{18}$, ou $\frac{6}{18} + \frac{1}{18}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. Ainsi il y a $\frac{1}{18}$ au-dessus du tiers, mais ce $\frac{1}{18}$ est moindre que le douzième que nous avons trouvé en ne prenant que trois termes.

Continuant à prendre un plus grand nombre de termes, on trouvera toujours que l'excès au-dessus d'un tiers sera une fraction qui ira en diminuant, c'est-à-dire que le dénominateur de la fraction augmentant toujours de 6, cette fraction sera $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{48}$, etc. De sorte que, quand le nombre des termes sera infini, la fraction sera $\frac{1}{\infty}$ ou un infinitième, c'est-à-dire un infiniment petit, lequel doit être regardé comme zéro, et par conséquent le rapport de la somme des termes au plus grand, multiplié par le nombre des termes, sera $\frac{1}{3}$, ou comme 1 à 3.

4° On prétend montrer d'une manière analogue que, pour la suite infinie 0. 1. 8. 27, 64, etc., des troisièmes puissances, le rapport est 1 à 4; que, pour la suite infinie des quatrièmes puissances, le rapport est 1 à 5; et ainsi de suite à l'infini, quant aux autres puissances.

Ainsi les rapports de la suite des égaux, de celle des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc., de celles de leurs carrés, de leurs cubes, etc., à leur plus grand terme multiplié par le nombre des termes sont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, etc., et par conséquent leurs dénominateurs sont dans la progression arithmétique des nombres naturels. Or, les puissances de ces différentes suites sont en progression géométrique, car a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, etc., forment une progression géométrique dont la raison est a; donc, quand les puissances des suites sont dans cette progression géométrique, les rapports de ces suites à leurs plus grands termes, multipliés par le nombre des termes, ont pour dénominateurs la progression arithmétique 1. 2. 3. 4, etc.

Les dénominateurs des rapports ci-dessus surpassent toujours d'une unité l'exposant des suites à qui ils appartiennent. Ainsi, l'exposant de la suite des égaux étant zéro, le dénominateur du rapport de cette suite à son dernier terme, multiplié par le nombre des termes, est $0 + 1$ ou 1. De même, l'exposant de la suite des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc., étant 1, le dénominateur de son rapport est $1 + 1$ ou 2, et ainsi des autres; d'où l'on tire cette règle que l'exposant d'une puissance quelconque étant n, le rapport des sommes est celui de 1 à $n + 1$.

De ce qui précède, on a déduit cette proposition : que le rapport d'une suite infinie de racines carrées à son dernier terme, multiplié par le nombre des termes, a pour dénominateur un nombre moyen arithmétique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ des égaux et le dénominateur du rapport de la suite dont cette racine est extraite; que le rapport d'une suite infinie de racines cubes a pour dénominateur le premier de deux moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 et le dénominateur du rapport de la suite dont on extrait la racine; et ainsi de suite, augmentant toujours le nombre des moyens arithmétiques à mesure que l'exposant des racines augmente.

D'où l'on a conclu que, pour trouver le rapport de la suite des racines $\sqrt[2]{0}$, $\sqrt[2]{1}$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, etc., des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc., il faut prendre un moyen arithmétique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ des égaux, et le dénominateur 2 du rapport $\frac{1}{2}$ des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc., et ce moyen arithmétique, qui est $\frac{3}{2}$, sera le dénominateur du rapport des racines. Ainsi la suite infinie des racines $\sqrt[2]{0}$, $\sqrt[2]{1}$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, etc., sera à la dernière multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{3}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3.

De même, pour trouver le rapport de la suite infinie des racines troisièmes $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, etc., des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc., il faut prendre deux moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 et le dénominateur 2, lesquels sont $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, et le premier $\frac{4}{3}$ sera le dénominateur du rapport des racines cubiques des nombres 0. 1. 2. 3. 4, etc. Donc la suite de ces racines sera à la dernière multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{4}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{4}{3}$, ou comme 3 à 4.

La partie de cette théorie qui est relative aux suites infinies est essentiellement vicieuse; car on ne peut sommer une suite infinie, et il est visible qu'il ne peut être vrai que le rapport de la suite infinie 0 . 1 . 4 . 9 . 27, etc., à son plus grand terme multiplié par le nombre de ses termes, soit exactement $\frac{1}{3}$, comme l'enseigne l'arithmétique des infinis : quel que fût le nombre des termes d'une suite, fût-il même infini, ce qui d'ailleurs est inadmissible, le rapport cherché excéderait toujours $\frac{1}{3}$. De même, le rapport concernant la suite des autres puissances, ne saurait être exactement $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{5}$, ou $\frac{1}{6}$, etc.

Pour l'application de l'arithmétique des infinis à la mesure des surfaces et des solides, on suppose les lignes composées de points, les surfaces composées de lignes parallèles, les solides formés de surfaces également parallèles. L'application est facile. En voici quelques exemples fort simples :

1° Pour prouver que l'aire d'un rectangle ABCD (fig. 57) a pour mesure le produit de la base AD par la hauteur AB, voici comment on raisonne :

Concevez que de tous les points de la hauteur AB soient tirées des parallèles à la base AD, ces parallèles couvriront totalement l'aire du rectangle qui, par conséquent, sera égale à leur somme. Or, ces parallèles sont toutes égales entre elles, car elles sont perpendiculaires entre les côtés AB, CD, qui sont parallèles; donc ces parallèles sont entre elles comme la suite infinie des égaux 1.1.1.1, etc.; mais la suite des égaux est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 1; donc la somme de ces parallèles est égale à la dernière AD multipliée par le nombre des termes. Or, le nombre des termes est la hauteur AB, car il y a autant de parallèles que la hauteur AB contient de points, et leur épaisseur est égale à l'épaisseur de ces points; donc la somme des parallèles ou le rectangle ABCD est égale à la base AD multipliée par la hauteur AB.

2° Veut-on trouver l'aire d'un triangle ABC par l'arithmétique des infinis? voici la démonstration :

Du sommet B (fig. 58) on abaisse la perpendiculaire BD sur la base AC; l'on conçoit que par tous les points E, F, G, etc., de la perpendiculaire BD, sont tirées des droites HI, LM, NO, etc., parallèles à la base, lesquelles seront les éléments du triangle, et dont la somme sera, par conséquent, égale à l'aire cherchée. Or, ces parallèles seront entre elles comme les parties BE, BF, BG, etc., de la perpendiculaire BD, qu'elles coupent, car à cause des triangles semblables BEI, BFM, etc., on a EI : FM : : BE : BF, et de même, à cause des triangles semblables BEH, BFL, etc., on a HE : LF : : BE : BF, et ainsi des autres. Or, les parties BE, BF, BG, etc., sont entre elles comme la suite infinie 0 . 1 . 2 . 3 . 4, etc., et cette suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2. Donc, la somme des éléments est au dernier AC multiplié par le nombre des termes BD, comme 1 à 2, et, par conséquent, le triangle est égal à la moitié du produit de sa base AC par sa hauteur BD.

FIN.

ERRATA.

Page 12, ligne 17. Or, cette sorte de spéculations, quels que soient ses développements, peut-elle réformer utilement....? — *Lisez :* Or, ces sortes de spéculations, quels que soient leurs développements, peuvent-elles réformer utilement....?

Page 14, ligne 21. .....Ou la même combinaison de force..... — *Lisez :* .....Ou la même combinaison de forces.....

Page 67, ligne 27. .....Et entre des courbes de diverses courbures. — *Lisez :* .....Et entre des lignes courbes de diverses courbures.

Page 81, ligne 24. L'on définit assez bien ces objets, si l'on dit qu'un corps ou solide est un objet qui a les trois dimensions..... — *Lisez :* L'on définit assez bien ces objets, si l'on dit qu'un corps ou solide est un objet formant un tout fini et qui a les trois dimensions.....

Page 115, ligne 12. D'où $\frac{1}{2}$ C'R' $= \frac{4}{4}\pi D'^2$.

Lisez : D'où $\frac{1}{2}$ C'R' $= \frac{1}{4}\pi D'^2$.

Page 124, ligne 22. .....On aura la somme des trapèzes..... — *Lisez :* .....On aura : la somme des trapèzes.....

Page 133, ligne 5. On a constaté l'évidence de ces propositions. — *Lisez :* On a contesté l'évidence de ces propositions.

Page 135, ligne 20. .....Qu'ainsi on peut toujours prendre..... — *Lisez :* .....Et qu'il en conclut qu'on peut toujours prendre.....

Page 166, ligne 20. Quand une ligne HH' (même figure) est inclinée vers une autre GG'..... — *Lisez :* Quand une ligne HH' (même figure) est inclinée vers une autre FG.....

Page 201, ligne 1. La perpendiculaire que l'on concevra à la distance *a*, prise pour abscisse..... — *Lisez :* La perpendiculaire que l'on concevra à la distance AQ $= a$, prise pour abscisse.....

Page 255, ligne 15. .....Et de ce qu'on y parvient..... — *Lisez :* .....Et de ce qu'on y parvient et que d'ailleurs elles sont reconnues vraies à quelque autre point de vue.....

Page 285, ligne 11. .....Car c'est vers le terme $2x$ que tend ce rapport, quand on fait diminuer h. — *Lisez :* .....Car c'est vers le terme $2x$ que tend ce rapport, quand h diminue, sans jamais atteindre ce terme.

Page 290, ligne 5. dy, dx, dz, dv, etc., expriment donc des quantités nulles. — *Lisez :* dy, dx, dz, dv, etc., expriment donc, dans la théorie des limites, des quantités nulles.

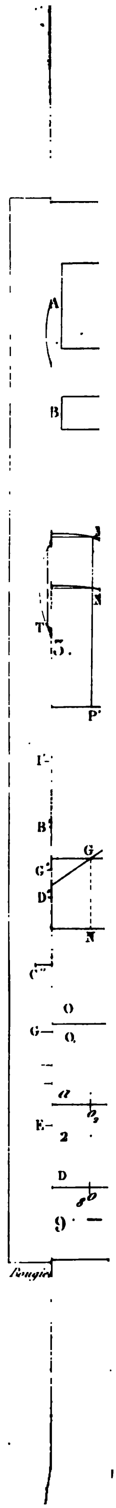
Page 321, ligne 15. .....Mais il n'en est pas ainsi de plusieurs courbes transcendantes,.... — *Lisez :* .....Mais il n'en est pas ainsi, à divers égards, de plusieurs courbes transcendantes,....

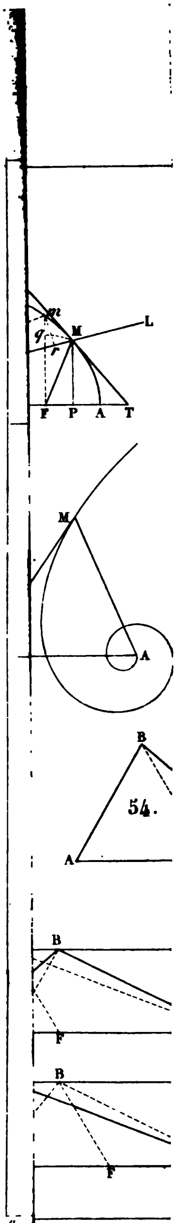
Page 350, ligne 19. .....De trois angles..... — *Lisez :* Des trois angles.....

Page 399, ligne 23. Cet argument : tous les hommes sont mortels ; Jacques est un homme ; donc Jacques est mortel, ne mérite point..... — *Lisez :* Cet argument : tous les hommes sont mortels ; Jacques est un homme ; donc Jacques est mortel (qui, à la vérité, ne présente pas d'axiome rationnel), ne mérite point.....

Page 415, ligne 9. Cette conversion serait facile, car..... — *Lisez :* Cette conversion serait facile, mais ne saurait être *absolument exacte*, car.....

PARIS. — IMPRIMERIE DE J. CLAYE, RUE SAINT-BENOIT, 7.


A
B
T
5.
P'
B
G
G
D
N
O
G
O
E
2
D
9


m
q
r
M
L
F
P
A
T
M
A
B
54.
A
B
F
B
F